Fonctions de la variable réelle - LIMITES

Exercice 1 : Déterminer les limites suivantes lorsqu'elles existent :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3}$	8. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + \sin(x)}{2 - \sin(x)}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(x)$	9. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
3. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}{x}$	10. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
4. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$	11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) - 2}{\ln(x) + 1}$
5. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$	12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \sin(5x^2)}{x + 1}$
6. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1 \right)$	13. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \cos(e^x)}{x^2 + 1}$
7. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\cos(x)}{1 - x}$	14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - \sin(x)}$
	15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - \sqrt{x} \sin(x)$

Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x^2}$.

1. Démontrer que, pour tout réel $x \neq 0$, $\frac{x-1}{x^2} < f(x) \leq \frac{1}{x}$.
2. En déduire la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 3 : Déterminer les limites suivantes lorsqu'elles existent :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2 x }{x}$	9. $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x^n - \alpha^n}$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2 x }{x}$	10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{\sin(x)(\cos(2x) - \cos(x))}$
3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$	11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$
4. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos(x)}$	12. $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha} - \sqrt{x - \alpha}}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}}, \quad (\alpha > 0)$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$	13. $\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$	14. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x^2 + x - 6}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}$	15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{1 + x^\alpha \sin^2 x}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$
8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n - 1}$	16. $\lim_{x \rightarrow \pi} \arctan \left(\sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}} \right)$

Exercice 4 : Trouver pour $(a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 5 : Déterminer la limite (si elle existe) des fonctions suivantes en 0. On distinguera éventuellement 0^- et 0^+ .

$$f_1 : x \mapsto \frac{3x^2 - 1}{x^2}$$

$$f_2 : x \mapsto \frac{2x - 1}{\sqrt{x}}$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{x^2}{|x|}$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{\tan(x)}{x}$$

$$f_5 : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$$

$$f_6 : x \mapsto \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{1 - \cos(x)}}$$

$$f_7 : x \mapsto \frac{\sin(5x)}{\sin(3x)}$$

$$f_8 : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

$$f_9 : x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

$$f_{10} : x \mapsto x^x$$

$$f_{11} : x \mapsto \frac{\ln(1+3x)}{x}$$

$$f_{12} : x \mapsto \frac{e^{\sin(x)} - 1}{5^x - 2^x}$$

$$f_{14} : x \mapsto \sqrt{x} \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor$$

$$f_{15} : x \mapsto \frac{x^2}{1 - \sqrt{1-x^2}}$$

$$f_{16} : x \mapsto \arctan\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$$

$$f_{17} : x \mapsto \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x^2 - 2x}$$

$$f_{18} : x \mapsto \frac{1}{1-x} - (1+x+\dots+x^n)$$

Exercice 6 : Montrer que la fonction $1_{\mathbb{Q}}$ indicatrice de $\mathbb{Q}$, définie sur $\mathbb{R}$, n'admet de limite en aucun point.

(On pourra utiliser l'existence, pour tout réel x , d'une suite de rationnels et d'une suite d'irrationnels convergeant vers x .)

Exercice 7 : Montrer que les courbes des fonctions $x \mapsto \frac{e^x}{2}$, $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$ et $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$ sont asymptotes en $+\infty$.

Exercice 8 : Pour les fonctions suivantes, étudier les asymptotes éventuelles ainsi que la position relative de leur courbe représentative.

$$f_1 : x \mapsto 3 - \frac{1}{x+2}$$

$$f_2 : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \text{ où } c \neq 0.$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{-x^3 + 2x^2 - x + 3}{x^2 + 1}.$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{3(x-1)^3}{3x^2 + 1}.$$

$$f_5 : x \mapsto \frac{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^4 - 1}$$

$$f_6 : x \mapsto \frac{2x-2}{x^2+x-2}$$

$$f_7 : x \mapsto \frac{2x^2 - 3x + 1}{x-1}$$

$$f_8 : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$$