Fonctions de la variable réelle - LIMITES

Exercice 1 : Déterminer les limites suivantes lorsqu'elles existent :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln(x)$
3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+1}-x$
5. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-1\right)$
7. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\cos(x)}{1-x}$
8. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+\sin(x)}{2-\sin(x)}$
9. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
10. $\lim\limits_{x\to0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
11. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)-2}{\ln(x)+1}$
12. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x\sin(5x^2)}{x+1}$
13. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x\cos\left(\mathrm{e}^x\right)}{x^2+1}$
14. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x-\sin(x)}$
15. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}-\sqrt{x}\sin(x)$

Correction : Par commodité d'écriture, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \ldots = \pm\infty$ signifiera $\lim\limits_{x\to-\infty} \ldots = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ldots = +\infty$, dans cet exercice.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{1-\frac{3}{\sqrt{x}}} = +\infty.$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$ d'après les théorèmes de croissances comparées.
3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{|x|}{x}\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}} = \pm1.$
4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+1}-x = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0.$
5. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1} = 0.$
6. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-1\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}-1}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\dfrac{2}{1-\frac{1}{x}}}{\sqrt{\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}}+1} = 1.$
7. $\forall\, x\neq1,\ -\dfrac{1}{1-x} \leqslant \dfrac{\cos(x)}{1-x} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\cos(x)}{1-x} = 0$ d'après le théorème d'encadrement.
8. $\forall\, x\in\mathbb{R},\ x-1 \leqslant \dfrac{x+\sin(x)}{2-\sin(x)} \leqslant \dfrac{x+1}{3}$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+\sin(x)}{2-\sin(x)} = \pm\infty$ d'après le théorème de comparaison.
9. $\forall\, x\in\mathbb{R},\ -x \leqslant x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant x$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = \pm\infty$ d'après le théorème de comparaison.
10. $\forall\, x\in\mathbb{R}^*,\ -x \leqslant x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant x$ donc $\lim\limits_{x\to0\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ d'après le théorème d'encadrement.

11. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)-2}{\ln(x)+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{\ln(x)}}{1+\frac{1}{\ln(x)}}=1$.
12. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\sin(5x^2)}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}2\sin(5x^2)$ donc pas de limites.
13. $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $\displaystyle -\frac{x}{x^2+1}\leqslant\frac{x\cos(\,\mathrm{e}^x)}{x^2+1}\leqslant\frac{x}{x^2+1}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\cos(\,\mathrm{e}^x)}{x^2+1}=0$ d'après le théorème d'encadrement.
14. $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $x-\sin(x)\geqslant x-1$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x-\sin(x)}=+\infty$ d'après le théorème de comparaison et celui sur les limites de composées.
15. $\forall\, x\in\mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\sqrt{x}-\sqrt{x}\sin(x)=\frac{\sqrt{x}\cos^2(x)}{1+\sin(x)}\geqslant\frac{\sqrt{x}}{2}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}-\sqrt{x}\sin(x)=+\infty$ d'après le théorème de comparaison.

Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x^2}$.

1. Démontrer que, pour tout réel $x\neq 0$, $\dfrac{x-1}{x^2}<f(x)\leqslant\dfrac{1}{x}$.
2. En déduire la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$.

Correction :

1. $\forall\, x\in\mathbb{R}*$, $x-1<\lfloor x\rfloor\leqslant x$ d'où $x^2>0$ entraine $\dfrac{x-1}{x^2}<f(x)\leqslant\dfrac{1}{x}$.
2. D'après le théorème d'encadrement, on en déduit :

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0.$$

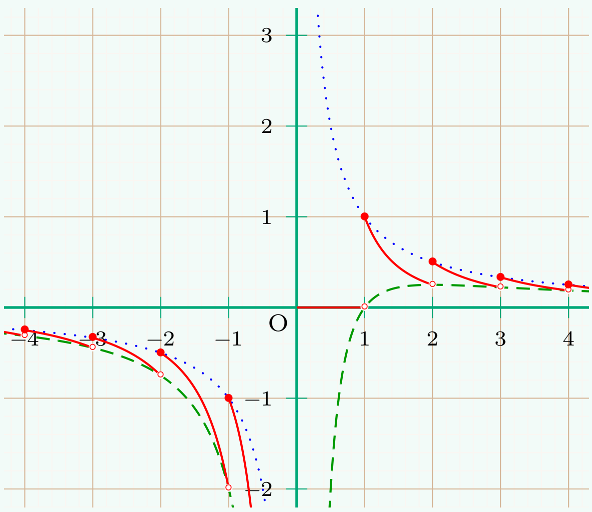

Figure XIV.1 – Courbes de $x\longmapsto\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x^2}$, $x\longmapsto\dfrac{1}{x}$ et $x\longmapsto\dfrac{x-1}{x^2}$.

Exercice 3 : Déterminer les limites suivantes lorsqu'elles existent :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2\,|x|}{x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+2\,|x|}{x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3\,x+2}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to \pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos(x)}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to \alpha}\frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin(x)(\cos(2x)-\cos(x))}$
11. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$
12. $\displaystyle\lim_{x\to \alpha^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}},\quad (\alpha>0)$
13. $\displaystyle\lim_{x\to 0}x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$
14. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{e^x-e^2}{x^2+x-6}$
15. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x^4}{1+x^\alpha\sin^2 x},\ \alpha\in\mathbb{R}$
16. $\displaystyle\lim_{x\to \pi}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}\right)$

Correction :

1. $\dfrac{x^2+2|x|}{x}=x+2\dfrac{|x|}{x}$. Si $x>0$ cette expression vaut $x+2$ donc la limite à droite en $x=0$ est $+2$. Si $x<0$ l'expression vaut -2 donc la limite à gauche en $x=0$ est -2. Les limites à droite et à gauche sont différentes donc il n'y a pas de limite en $x=0$.
2. $\dfrac{x^2+2|x|}{x}=x+2\dfrac{|x|}{x}=x-2$ pour $x<0$. Donc la limite quand $x\to-\infty$ est $-\infty$.
3. $\dfrac{x^2-4}{x^2-3\,x+2}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=\dfrac{x+2}{x-1}$, lorsque $x\to 2$ cette expression tend vers 4.
4. $\dfrac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}=\dfrac{1-\cos^2(x)}{1+\cos(x)}=\dfrac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{1+\cos(x)}=1-\cos(x)$. Lorsque $x\to\pi$ la limite est donc 2.
5. $$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}\times\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1+x-(1+x^2)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})}.$$
$$=\frac{x-x^2}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})}=\frac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}.$$
Lorsque $x\to 0$ la limite vaut $\dfrac{1}{2}$.
6. $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}\right)\times\dfrac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}=\dfrac{x+5-(x-3)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}=\dfrac{8}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}$.
Lorsque $x\to+\infty$, la limite vaut 0.
7. Nous avons l'égalité $a^3-1=(a-1)(1+a+a^2)$. Pour $a=\sqrt[3]{1+x^2}$ cela donne :
$$\frac{a-1}{x^2}=\frac{a^3-1}{x^2(1+a+a^2)}=\frac{1+x^2-1}{x^2(1+a+a^2)}=\frac{1}{1+a+a^2}.$$
Lors que $x\to 0$, alors $a\to 1$ et la limite cherchée est $\dfrac{1}{3}$.

Autre méthode : si l'on sait que la limite d'un taux d'accroissement correspond à la dérivée nous avons une méthode moins astucieuse. Rappel (ou anticipation sur un prochain chapitre) : pour une

fonction f dérivable en a alors
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a).$$
Pour la fonction $f(x)=\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{3}}$ ayant $f'(x)=\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$ cela donne en $a=0$:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=\frac{1}{3}.$$

8. $\dfrac{x^n-1}{x-1}=1+x+x^2+\cdots+x^n$. Donc si $x\to 1$ la limite de $\dfrac{x^n-1}{x-1}$ est n. Donc la limite de $\dfrac{x-1}{x^n-1}$ en 1 est $\dfrac{1}{n}$.

   La méthode avec le taux d'accroissement fonctionne aussi très bien ici. Soit $f(x)=x^n$, $f'(x)=nx^{n-1}$ et $a=1$. Alors $\dfrac{x^n-1}{x-1}=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ tend vers $f'(1)=n$.

9. Montrons d'abord que la limite de
$$f(x)=\frac{x^k-\alpha^k}{x-\alpha}$$
   en α est $k\alpha^{k-1}$, k étant un entier fixé. Un calcul montre que $f(x)=x^{k-1}+\alpha x^{k-2}+\alpha^2x^{k-3}+\cdots+\alpha^{k-1}$; en effet $(x^{k-1}+\alpha x^{k-2}+\alpha^2x^{k-3}+\cdots+\alpha^{k-1})(x-\alpha)=x^k-\alpha^k$. Donc la limite en $x=\alpha$ est $k\alpha^{k-1}$. Une autre méthode consiste à dire que $f(x)$ est la taux d'accroissement de la fonction x^k, et donc la limite de f en α est exactement la valeur de la dérivée de x^k en α, soit $k\alpha^{k-1}$. Ayant fait ceci revenons à la limite de l'exercice : comme
$$\frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n}=\frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x-\alpha}\times\frac{x-\alpha}{x^n-\alpha^n}.$$
   Le premier terme du produit tend vers $(n+1)\alpha^n$ et le second terme, étant l'inverse d'un taux d'accroissement, tend vers $1/(n\alpha^{n-1})$. Donc la limite cherchée est
$$\frac{(n+1)\alpha^n}{n\alpha^{n-1}}=\frac{n+1}{n}\alpha.$$

10. La fonction $f(x)=\dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin(x)(\cos(2x)-\cos(x))}$ s'écrit aussi $f(x)=\dfrac{1-\cos(x)}{\cos(x)(\cos(2x)-\cos(x))}$.

    Or $\cos(2x)=2\cos^2(x)-1$. Posons $u=\cos(x)$, alors
$$f(x)=\frac{1-u}{u(2u^2-u-1)}=\frac{1-u}{u(1-u)(-1-2u)}=\frac{1}{u(-1-2u)}$$
    Lorsque x tend vers 0, $u=\cos(x)$ tend vers 1, et donc $f(x)$ tend vers $-\dfrac{1}{3}$.

11.
$$\begin{aligned}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}&=\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}\\&=\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}\\&=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}+1}\end{aligned}$$

Quand $x \to +\infty$ alors $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \to 0$ et $\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x} = \sqrt{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}}} \to 0$, donc la limite recherchée est $\dfrac{1}{2}$.

12. La fonction s'écrit

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha} - \sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha} - \sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}\sqrt{x+\alpha}} = \frac{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}} - 1}{\sqrt{x+\alpha}}.$$

Notons $g(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}$ alors à l'aide de l'expression conjuguée

$$g(x) = \frac{x-\alpha}{(\sqrt{x-\alpha})(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha})} = \frac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}}.$$

Donc $g(x)$ tend vers 0 quand $x \to \alpha^+$. Et maintenant $f(x) = \dfrac{g(x)-1}{\sqrt{x+\alpha}}$ tend vers $-\dfrac{1}{\sqrt{2\alpha}}$.

13. Pour tout réel y nous avons la double inégalité $y - 1 < \lfloor y \rfloor \leqslant y$. Donc pour $y > 0$, $\dfrac{y-1}{y} < \dfrac{\lfloor y \rfloor}{y} \leqslant 1$.

On en déduit que lorsque y tend vers $+\infty$ alors $\dfrac{\lfloor y \rfloor}{y}$ tend 1.

On obtient le même résultat quand y tend vers $-\infty$.

En posant $y = 1/x$, et en faisant tendre x vers 0, alors $x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = \dfrac{\lfloor y \rfloor}{y}$ tend vers 1.

14.

$$\frac{e^x - e^2}{x^2+x-6} = \frac{e^x-e^2}{x-2} \times \frac{x-2}{x^2+x-6} = \frac{e^x-e^2}{x-2} \times \frac{x-2}{(x-2)(x+3)} = \frac{e^x-e^2}{x-2} \times \frac{1}{x+3}.$$

La limite de $\dfrac{e^x-e^2}{x-2}$ en 2 vaut e^2 ($\dfrac{e^x-e^2}{x-2}$ est la taux d'accroissement de la fonction $x \mapsto e^x$ en la valeur $x = 2$), la limite voulue est $\dfrac{e^2}{5}$.

15. Soit $f(x) = \dfrac{x^4}{1 + x^\alpha \sin^2 x}$. Supposons $\alpha \geqslant 4$, alors on prouve que f n'a pas de limite en $+\infty$. En effet pour pour $u_k = 2k\pi$, $f(2k\pi) = (2k\pi)^4$ tend vers $+\infty$ lorsque k (et donc u_k) tend vers $+\infty$. Cependant pour $v_k = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $f(v_k) = \dfrac{v_k^4}{1+v_k^\alpha}$ tend vers 0 (ou vers 1 si $\alpha = 4$) lorsque k (et donc v_k) tend vers $+\infty$. Ceci prouve que $f(x)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.

Reste le cas $\alpha < 4$. Il existe β tel que $\alpha < \beta < 4$.

$$f(x) = \frac{x^4}{1 + x^\alpha \sin^2(x)} = \frac{x^{4-\beta}}{\frac{1}{x^\beta} + \frac{x^\alpha}{x^\beta}\sin^2(x)}.$$

Le numérateur tend $+\infty$ car $4 - \beta > 0$. $\dfrac{1}{x^\beta}$ tend vers 0 ainsi que $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta}\sin^2(x)$ (car $\beta > \alpha$ et $\sin^2(x)$ est bornée par 1).

Donc le dénominateur tend vers 0 par valeurs positives. La limite vaut donc $+\infty$.

16. $\lim\limits_{x\to\pi} 1 + \cos(x) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to\pi} \sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}} = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to\pi} \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 4 : Trouver pour $(a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Correction : Supposons $a \geqslant b$. Alors

$$\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(a^x \times \frac{1 + (\frac{b}{a})^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = a\left(\frac{1 + (\frac{b}{a})^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Or, $0 \leqslant \dfrac{b}{a} \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \left(\dfrac{b}{a}\right)^x \leqslant 1$ pour tout $x \geqslant 1$.

Donc $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \leqslant \left(\dfrac{1 + (\frac{b}{a})^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \leqslant 1^{\frac{1}{x}}$.

Les deux termes extrêmes tendent vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$ donc le terme du milieu tend aussi vers d'après le théorème d'encadrement.

Conclusion, si $a \geqslant b$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = a$.

Si $b \geqslant a$ alors cette limite vaudrait b.

Cela se résume dans le cas général où a, b sont quelconques par

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \max(a, b).$$

Exercice 5 : Déterminer la limite (si elle existe) des fonctions suivantes en 0. On distinguera éventuellement 0^- et 0^+.

$f_1 : x \longmapsto \dfrac{3x^2 - 1}{x^2}$

$f_2 : x \longmapsto \dfrac{2x - 1}{\sqrt{x}}$

$f_3 : x \longmapsto \dfrac{x^2}{|x|}$

$f_4 : x \longmapsto \dfrac{\tan(x)}{x}$

$f_5 : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$

$f_6 : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1 + \cos(x)}{1 - \cos(x)}}$

$f_7 : x \longmapsto \dfrac{\sin(5x)}{\sin(3x)}$

$f_8 : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$

$f_9 : x \longmapsto \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2}$

$f_{10} : x \longmapsto x^x$

$f_{11} : x \longmapsto \dfrac{\ln(1 + 3x)}{x}$

$f_{12} : x \longmapsto \dfrac{x}{e^{\sin(x)} - 1}$

$f_{13} : x \longmapsto \dfrac{5^x - 2^x}{x}$

$f_{14} : x \longmapsto \sqrt{x}\left\lfloor \dfrac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor$

$f_{15} : x \longmapsto \dfrac{x^2}{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

$f_{16} : x \longmapsto \arctan\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$

$f_{17} : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{1 - x} - 1}{x^2 - 2x}$

$f_{18} : x \longmapsto \dfrac{\frac{1}{1 - x} - (1 + x + \cdots + x^n)}{x^n}$

Correction :

1. Au voisinage de 0, $3x^2 - 1 < 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 - 1}{x^2} = -\infty$.

2. Pour tout $x>0$, $\dfrac{2x-1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{2x-1}{\sqrt{x}} = -\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0} \pm x = 0$.
4. On reconnaît le taux d'accroissement en 0 de la fonction $\tan$ qui y est dérivable donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 1+\tan^2(x) = 1$.
5. Même chose avec la fonction $x \longmapsto \sqrt{1+x^2}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$.
6. $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $1-\cos(x) > 0$ et $1+\cos(x) > 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\dfrac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}} = +\infty$
7. $\forall\, x \neq 0$, $\dfrac{\sin(5x)}{\sin(3x)} = \dfrac{\sin(5x)}{5x} \times \dfrac{3x}{\sin(3x)} \times \dfrac{5}{3}$ donc, d'après la limite connue $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin(u)}{u} = 1$, on en déduit $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{\sin(3x)} = \dfrac{5}{3}$.
8. Même chose avec $\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sin(x)}{x}\sqrt{x}$ pour tout $x>0$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = 0$.
9. $\forall\, x \neq 0$, $\dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.
10. $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^x = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$. D'après les théorèmes sur les croissances comparées et ceux sur les limites de composées, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x = 1$.
11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x} = 3 \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{3x} = 3$ d'après les théorèmes de croissances comparées en 0.
12. En reconnaissant l'inverse du taux de variation de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{\sin(x)}$ en 0 qui y est dérivable et de nombre dérivé non nul, on obtient :
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\mathrm{e}^{\sin(x)}-1} = \frac{1}{\left(\mathrm{e}^{\sin(x)}\right)'(0)} = \frac{1}{\cos(0)\,\mathrm{e}^{\sin(0)}} = 1.$$
13. Même chose après avoir factorisé par 2^x : $\lim\limits_{x\to 0} 2^x \left(\left(\dfrac{5}{2}\right)^x\right)'(0) = \ln\left(\dfrac{5}{2}\right)$.
14. $\forall\, x > 0$, $\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1 < \left\lfloor \dfrac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ donc $1-\sqrt{x} < \sqrt{x}\left\lfloor \dfrac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor \leqslant 1$ et, d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x}\left\lfloor \dfrac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor = 1$.
15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} 1+\sqrt{1-x^2} = 2$.
16. D'après les théorème de croissances comparées $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1$ donc, d'après les théorèmes de limite de composées $\lim\limits_{x\to 0} \arctan\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x^2-2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{(x-2)\left(\sqrt{1-x}+1\right)} = \dfrac{1}{4}$.
18. $\forall\, x \neq 1$, $\dfrac{\dfrac{1}{1-x} - (1+x+\cdots+x^n)}{x^n} = \dfrac{x}{1-x}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{1-x} - (1+x+\cdots+x^n)}{x^n} = 0$.

Fonctions de la variable réelle - LIMITES

Exercice 6 : Montrer que la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ indicatrice de $\mathbb{Q}$, définie sur $\mathbb{R}$, n'admet de limite en aucun point.

(On pourra utiliser l'existence, pour tout réel x, d'une suite de rationnels et d'une suite d'irrationnels convergeant vers x.)

Correction : Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque.

Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, $x_0 = \lim\limits_{n \to +\infty} r_n$ où $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de rationnels.

On a alors $\lim\limits_{x \to x_0} \mathbb{1}(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{1}(r_n) = 1$.

Cependant, par densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, $x_0 = \lim\limits_{n \to +\infty} q_n$ où $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de d'irrationnels.

On alors $\lim\limits_{x \to x_0} \mathbb{1}(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{1}(q_n) = 0$.

La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'admet donc de limite en aucun point.

Exercice 7 : Montrer que les courbes des fonctions $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$, $x \longmapsto \operatorname{ch}(x)$ et $x \longmapsto \operatorname{sh}(x)$ sont asymptotes en $+\infty$.

Correction :

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{ch}(x) - \frac{\mathrm{e}^x}{2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{2} - \operatorname{sh}(x) = \frac{1}{2} \lim_{x \to +\infty} \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2} = 0.$$

Donc, les courbes des fonctions $x \longmapsto \operatorname{ch}(x)$, $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$ et $x \longmapsto \operatorname{sh}(x)$ sont asymptotes en $+\infty$ dans cet ordre.

Exercice 8 : Pour les fonctions suivantes, étudier les asymptotes éventuelles ainsi que la position relative de leur courbe représentative.

$f_1 : x \longmapsto 3 - \dfrac{1}{x+2}$

$f_2 : x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ où $c \neq 0$.

$f_3 : x \longmapsto \dfrac{-x^3+2x^2-x+3}{x^2+1}$.

$f_4 : x \longmapsto \dfrac{3\,(x-1)^3}{3x^2+1}$.

$f_5 : x \longmapsto \dfrac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^4-1}$

$f_6 : x \longmapsto \dfrac{2x-2}{x^2+x-2}$

$f_7 : x \longmapsto \dfrac{2x^2-3x+1}{x-1}$

$f_8 : x \longmapsto \sqrt{x^2-x+1}$

Correction : On notera $\mathscr{C}_i$ la courbe représentative de la fonction f_i.

1. Comme $\lim\limits_{x\to-2} 3-\dfrac{1}{x+2}=\pm\infty$, $\mathscr{C}_1$ admet une asymptote d'équation $x=-2$.

   De plus, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} -\dfrac{1}{x+2}=0^-$.

   Donc $\mathscr{C}_1$ admet la droite d'équation $y=3$ pour asymptote et se situe en dessous de celle-ci au voisinage de $\pm\infty$.
2. Comme $\lim\limits_{x\to-\frac{d}{c}} \dfrac{ax+b}{cx+d}=\pm\infty$, $\mathscr{C}_2$ admet une asymptote d'équation $x=-\dfrac{d}{c}$.

   De plus, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{ax+b}{cx+d}=\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a}{c}-(ad-bc)\dfrac{1}{\underbrace{c^2x+cd}_{\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}0^+}}=\dfrac{a}{c}$.

   Donc $\mathscr{C}_2$ admet la droite d'équation $y=\dfrac{a}{c}$ pour asymptote et sa position est donnée par le signe de $-(ad-bc)$.
3. Une division euclidienne de polynômes s'écrit $\dfrac{-x^3+2x^2-x+3}{x^2+1}=-x+2+\dfrac{2}{x^2+1}$.

   $\mathscr{C}_3$ admet donc la droite d'équation $y=-x+2$ pour asymptote et se situe dessus celle-ci en l'infini.
4. Une division euclidienne de polynômes s'écrit $\dfrac{3\,(x-1)^3}{3x^2+1}=x-3+\dfrac{8x}{3x^2+1}$.

   $\mathscr{C}_4$ admet donc la droite d'équation $y=x-3$ pour asymptote et se situe dessus celle-ci en $+\infty$, dessous en $-\infty$.
5. $$\begin{aligned}\frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^4-1}&=\frac{x^6-1}{(x-1)(x^4-1)}=\frac{(x^3-1)(x^3+1)}{(x-1)(x^2-1)(x^2+1)}\\&=\frac{(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x-1)(x+1)(x^2+1)}\\&=\frac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x^2+1)}.\end{aligned}$$

   Comme 1 n'est pas racine du numérateur, $\mathscr{C}_5$ admet une asymptote d'équation $x=1$.

   Commentaires : *La valeur -1 est appelée une fausse singularité.*

   De plus, $\forall\, x\neq 1$, $\dfrac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^4-1}=x+1+\underbrace{\dfrac{x^3+x^2+2x+2}{x^4-1}}_{\text{du signe de } x^3 \text{ en } \pm\infty}$.

   $\mathscr{C}_5$ admet donc la droite d'équation $y=x+1$ pour asymptote et se situe dessus celle-ci en $+\infty$, dessous en $-\infty$.
6. $\dfrac{2x-2}{x^2+x-2}=\dfrac{2}{x+2}$ donc $\mathscr{C}_6$ admet une asymptote d'équation $x=-2$. Le pôle 1 qui est aussi une racine du numérateur est une fausse singularité.

   De plus $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \underbrace{\dfrac{2x-2}{x^2+x-2}}_{\text{du signe de } x \text{ en } \pm\infty}=0$. Donc, $\mathscr{C}_6$ admet l'axe des abscisses pour asymptote et se situe dessus celui-ci en $+\infty$, dessous en $-\infty$.
7. $\dfrac{2x^2-3x+1}{x-1}=2x-1$. Donc $\mathscr{C}_7$ n'a pas d'asymptotes.
8. f_8 est définie sur $\mathbb{R}$ et on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=\pm 1$.

Fonctions de la variable réelle - LIMITES

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x+1}-x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = -\dfrac{1}{2}$.

Donc, $\mathscr{C}_8$ admet la droite d'équation $y = x - \dfrac{1}{2}$ pour asymptote en $+\infty$.

Pour déterminer la position, on étudie le signe de $\sqrt{x^2-x+1} - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

$$\sqrt{x^2-x+1} - \left(x-\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2-x+1}+\left(x-\frac{1}{2}\right)} > 0.$$

Donc, $\mathscr{C}_8$ se situe au dessus de son asymptote en $+\infty$.

En $-\infty$, on a successivement

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-x+1}+x = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1} = \frac{1}{2}.$$

Puis $\sqrt{x^2-x+1} - \left(-x+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2-x+1}+\left(-x+\frac{1}{2}\right)} > 0.$

Donc, $\mathscr{C}_8$ admet la droite d'équation $y = -x + \dfrac{1}{2}$ pour asymptote en $-\infty$ et se situe au-dessus au voisinage de $-\infty$.