

Nombres réels et calculs matriciels

1. Calculs dans $\mathbb{R}$

- Propriétés élémentaires de la relation d'ordre $\leq$. Compatibilité avec $+$, $\times$, le passage à l'inverse, le carré.
- Définition du majorant, minorant, partie majorée, minorée, bornée.
- Définition du maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure.
- Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients.
- Théorème (admis) : toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- Caractérisation de la borne supérieure. De même pour la borne inférieure.
- Définition d'un intervalle et classification des intervalles de $\mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}}$.
- Propriété d'Archimède, définition de la partie entière notée $[...]$. Graphe et propriétés élémentaires.
- Valeur absolue. Graphe et propriétés élémentaires. Inégalité triangulaire. Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $|x - a| \leq r$
- Distance entre deux réels, inégalité triangulaire.
- Résolutions d'équations, d'inéquations avec valeur absolue et/ou racine carrée. Utilisation de factorisations et de tableaux de signes

2. Calcul matriciel

- Définition d'une matrice, d'un vecteur ligne ou colonne. Addition de deux matrices et multiplication par un scalaire.
- Produit matriciel et compatibilité avec l'addition.
- Définition des matrices carrées, matrice identité.
- Non-intégrité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Matrices diagonales, triangulaires supérieures et inférieures. Stabilité.
- Définition de la puissance d'une matrice. Formule du binôme de Newton et égalité de Bernoulli lorsque les matrices commutent.
- Matrices inversibles. Théorème admis : si une matrice est inversible à droite ou à gauche alors elle est inversible. Inverse du produit.
- Transposée d'une matrice. Linéarité. Transposée d'un produit.
- Matrices symétriques, antisymétriques, stabilité des ensembles.
- Trace d'une matrice. Linéarité. Trace d'un produit.
- Lien entre un système linéaire et une équation matricielle, version matricielle des opérations élémentaires.

Questions de cours possibles ^[1] :

1. (★) Caractérisation des intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$.
2. (★) $\mathbb{R}$ est archimédien.
3. (★) Existence et unicité de la partie entière.
4. L'application $x \mapsto [x]$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, [x + n] = [x] + n$.
5. Caractérisation de la borne supérieure
6. Si $X \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$ est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A .
7. Binôme de Newton dans le cas de matrices qui commutent.
8. L'ensemble des matrices triangulaires est stable par produit matriciel.
9. Propriétés de la transposition : linéarité, involutivité et contravariance de la transposée d'un produit.
10. (★) CNS d'inversibilité d'une matrice triangulaire.
11. Définition et linéarité de la trace. Invariance par similitude.