Suites II

1. Soit $q \in]1\,;+\infty[$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

   $\forall\, n \geqslant 2,\ q^n = ((q-1)+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{(q-1)^k}_{\geqslant 0} = 1 + n(q-1) + \sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (q-1)^k \geqslant n(q-1).$

   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n(q-1) = +\infty$ car $q > 1$.

   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ d'après le théorème de comparaison.

2. Soient deux suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et ${}_vn$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

   Donner la limite de la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la démontrer.

   Soit $\mathrm{A} > 0$. Par hypothèse, $|u_n - \ell| < 1$ à partir d'un certain rang $n_0(1)$, donc, en particulier :

   $$\forall\, n \geqslant n_0,\ u_n > \ell - 1.$$

   De même, pour $n \geqslant n_1(\mathrm{A} - \ell + 1)$, $v_n > \mathrm{A} - \ell + 1$.

   Pour $n \geqslant \mathrm{N} = \max(n_0\,; n_1)$, on a donc :

   $$u_n + v_n \geqslant (\ell - 1) + (\mathrm{A} - \ell + 1) = \mathrm{A}.$$

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante et majorée. On pose $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque.

   (a) Justifier que $\alpha = \sup\left(\left\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\right\}\right)$ est correctement défini et vérifie $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \alpha + \varepsilon$.

   Par construction, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée donc l'ensemble $\left\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\right\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Elle admet donc une borne supérieure α qui vérifie, par définition :

   $$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \alpha \leqslant \alpha + \varepsilon.$$

   (b) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p \geqslant \alpha - \varepsilon$.

   Par définition de α, $\alpha - \varepsilon < \alpha$ n'est pas un majorant de $\left\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\right\}$ donc il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que :

   $$u_p \geqslant \alpha - \varepsilon.$$

   (c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

   Par croissance de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \implies u_n \geqslant u_p$. En regroupant les résultats précédents, on a donc prouver que :

   $$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, p(\alpha, \varepsilon), \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \implies \alpha - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \alpha + \varepsilon.$$

   C'est la définition de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers α.

Suites II

1. Soit $q \in]-\infty\,;-1[$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

   Il suffit de regarder les suites extraites $(q^{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(q^{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ qui divergent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$. La suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc divergente.

2. Soient deux suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $_v n$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

   Donner la limite de la suite $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la démontrer.

   Soit $\mathrm{A} > 0$. Par hypothèse, $|u_n - \ell| < \dfrac{\ell}{2}$ à partir d'un certain rang $n_0\left(\dfrac{\ell}{2}\right)$, donc, en particulier :

   $$\forall\, n \geqslant n_0,\ u_n > \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} > 0.$$

   De même, il existe un rang $n_1\left(\dfrac{2\mathrm{A}}{\ell}\right)$ à partir duquel $v_n > \dfrac{2\mathrm{A}}{\ell} > 0$.

   Pour $n \geqslant \mathrm{N} = \max(n_0\,;n_1)$, en multipliant membre à membre deux inégalités de même sens strictement positives, on a donc :

   $$u_nv_n > \frac{\ell}{2} \times \frac{2\mathrm{A}}{\ell} = \mathrm{A}.$$

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante et majorée. On pose $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque.

   (a) Justifier que $\alpha = \sup\left(\left\{u_n,\ n\in\mathbb{N}\right\}\right)$ est correctement défini et vérifie $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \alpha + \varepsilon$.

   Par construction, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée donc l'ensemble $\left\{u_n,\ n\in\mathbb{N}\right\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Elle admet donc une borne supérieure α qui vérifie, par définition :

   $$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \alpha \leqslant \alpha + \varepsilon.$$

   (b) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p \geqslant \alpha - \varepsilon$.

   Par définition de α, $\alpha - \varepsilon < \alpha$ n'est pas un majorant de $\left\{u_n,\ n\in\mathbb{N}\right\}$ donc il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que :

   $$u_p \geqslant \alpha - \varepsilon.$$

   (c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

   Par croissance de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \implies u_n \geqslant u_p$. En regroupant les résultats précédents, on a donc prouver que :

   $$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, p(\alpha,\varepsilon), \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \implies \alpha - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \alpha + \varepsilon.$$

   C'est la définition de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers α.