Nom : .... **Prénom :** ....

Nombres réels et calculs matriciels

Question de cours : Binôme de Newton dans le cas de matrices qui commutent.

Exercice 1 : Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si possible de tête $\dfrac{16^{n+1}}{3} + \dfrac{(-4)^{2n+1}}{5} + \dfrac{(-2)^{4n}}{6}$.

Exercice 2 : Soient a et b des réels non nuls, et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Trouver toutes les matrices $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à -dire telles que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$.

Exercice 3 : Simplifier $\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Nombres réels et calculs matriciels

Question de cours : L'ensemble des matrices triangulaires est stable par produit matriciel.

Exercice 1 : Étudier le signe de $x + \sqrt{1 + x^2}$.

Exercice 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $|x+1| = |-x+5|$;
2. $|x+5| + |-2x+2| - 4|x-2| \leqslant 0$.

Nom : ....   **Prénom :** ....

Nombres réels et calculs matriciels

Question de cours : Caractérisation de la borne supérieure.

Exercice 1 : Soient x et y dans $]-1,1[$.

Montrer que $\dfrac{x+y}{1+xy} \in]-1,1[$.

Exercice 2 : Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(\mathrm{A}+\mathrm{I})^3$.
2. En déduire que A est inversible.

Exercice 3 : Représenter la fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Nombres réels et calculs matriciels

Question de cours : Définition et linéarité de la trace. Invariance par similitude.

Exercice 1 : Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$. On pose $m = \dfrac{x+y}{2}$ (moyenne arithmétique) et $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y})$ (moyenne harmonique).

Montrer que $x \leqslant h \leqslant m \leqslant y$.

Exercice 2 : Soit

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{B} = \mathrm{A} - \mathrm{I}.$$

Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n.

Exercice 3 : Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

1. $[0,1] \cap \mathbb{Q}$
2. $]0,1[\cap\mathbb{Q}$
3. $\mathbb{N}$
4. $\left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Nom : .... **Prénom :** ....

Nombres réels et calculs matriciels

Question de cours : CNS d'inversibilité d'une matrice triangulaire.

Exercice 1 : Proposer un encadrement des quantités suivantes de $\dfrac{2x^2-x+1}{x^2+\sqrt{x+2}+3}$ pour $x \in [-1,1]$.

Exercice 2 :

1. Pour $n \geqslant 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par X^2-3X+2.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
3. Déduire de la question précédente la valeur de A^n, pour $n \geqslant 2$.

Exercice 3 :

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
2. En déduire la partie entière de $A = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{10000}}$.

Nom : ....

Prénom : ....

Nombres réels et calculs matriciels

Question de cours : Caractérisation des intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$.

Exercice 1 :

1. Montrer que $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$ pour tous $x, y \geqslant 0$.
2. En déduire que pour tous $x, y > 0$:

$$\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{x^2+y^4} \leqslant \frac{1}{xy}.$$

Exercice 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A + I_3)^3$.
2. Montrer que A est inversible et donner A^{-1}.
3. Déterminer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 : Soit $A = \left\{ \dfrac{1}{n} + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Déterminer sup A et inf A.

Nom : ....   **Prénom :** ....

Nombres réels et calculs matriciels

Question de cours : Propriétés de la transposition : linéarité, involutivité et contravariance de la transposée d'un produit.

Exercice 1 : Si a et b sont des réels positifs ou nuls, montrer que :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant 2\sqrt{a+b}.$$

Exercice 2 : Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que :

$$\forall\, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{AB} = \mathrm{BA} \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \mathrm{A} = \lambda.\mathrm{I}_n$$

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $|x+1| = |-x+5|$;
2. $|x+5| + |-2x+2| - 4|x-2| \leqslant 0$.

Nom : ....   **Prénom :** ....

Nombres réels et calculs matriciels

Question de cours : Caractérisation de la borne supérieure.

Exercice 1 : Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$. On pose $m = \dfrac{x+y}{2}$ (moyenne arithmétique) et $g = \sqrt{xy}$ (moyenne géométrique).

Montrer que $x \leqslant g \leqslant m \leqslant y$.

Exercice 2 : Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathrm{A}^2 - 3\mathrm{A} + 2\mathrm{I}_3$. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Exercice 3 : Représenter la fonction et $x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Nombres réels et calculs matriciels

Question de cours : L'application $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Exercice 1 : Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$. On pose $g = \sqrt{xy}$ (moyenne géométrique) et $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y})$ (moyenne harmonique).

Montrer que $x \leqslant h \leqslant g \leqslant y$.

Exercice 2 : Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *i.e.* $\{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall\, \mathrm{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{MX} = \mathrm{XM}\}$.

Exercice 3 : Montrer que :

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Trouver une formule pour $\max(x,y,z)$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Nombres réels et calculs matriciels

Question de cours : Si $X \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$ est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.

Exercice 1 : Déterminer le plus petit intervalle contenant les produits xy où x et y sont des réels quelconques des intervalles $]-1, 2[$ et $\left]-\frac{1}{3}\,;\frac{1}{2}\right[$.

Exercice 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Exercice 3 : Déterminer la borne supérieure et inférieure (si elles existent) de :

$$A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

en posant $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n}$ sinon.

Nom : .... **Prénom :** ....

Nombres réels et calculs matriciels

Question de cours : $\mathbb{R}$ est archimédien.

Exercice 1 :

1. Montrer que $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$ pour tous $x, y > 0$.
2. En déduire que pour tous $a, b, c > 0$:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$$

À quelle condition a-t-on égalité ?

Exercice 2 : Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer les réels a, b, c tels que $\mathrm{A}^3 = a\mathrm{A}^2 + b\mathrm{A} + c\mathrm{I}_3$.

Exercice 3 : Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (x \in \mathbb{Z}) \iff (\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \lfloor nx \rfloor = n \lfloor x \rfloor)$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Nombres réels et calculs matriciels

Question de cours : Existence et unicité de la partie entière.

Exercice 1 :

1. Montrer que $\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqslant \sqrt{2}\sqrt{x+y}$ pour tous $x, y \geqslant 0$.
2. En déduire que pour tous $x, yz \geqslant 0$:
$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leqslant \sqrt{\frac{x+y}{2}}+\sqrt{\frac{y+z}{2}}+\sqrt{\frac{z+x}{2}}.$$
3. En déduire que si a, b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle quelconque :
$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

Exercice 2 : Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est-à -dire qu'il existe $p \geqslant 1$ tel que $\mathrm{A}^p = 0$.

1. Calculer $(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})(\mathrm{I}_n + \mathrm{A} + \ldots + \mathrm{A}^{p-1})$.
2. En déduire que la matrice $\mathrm{I}_n - \mathrm{A}$ est inversible, et donner son inverse.

Exercice 3 : Soit $\mathrm{A} = \left\{ \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$.

Montrer que A admet une borne inférieure, et la calculer.