Nombres réels et calculs matriciels

Question de cours : Binôme de Newton dans le cas de matrices qui commutent.

Exercice 1 : Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si possible de tête $\dfrac{16^{n+1}}{3} + \dfrac{(-4)^{2n+1}}{5} + \dfrac{(-2)^{4n}}{6}$.

Exercice 2 : Soient a et b des réels non nuls, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à -dire telles que $AB = BA$.

Exercice 3 : Simplifier $\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$.

Correction : $\left(\sqrt{a-1}+1\right)^2 = a + 2\sqrt{a-1}$ donc $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}} = |\sqrt{a-1}+1|$.

Nombres réels et calculs matriciels

Question de cours : L'ensemble des matrices triangulaires est stable par produit matriciel.

Exercice 1 : Étudier le signe de $x + \sqrt{1+x^2}$.

Exercice 2 : Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathrm{A}^2 = 2\mathrm{I}_3 - \mathrm{A}$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $|x+1| = |-x+5|$;
2. $|x+5| + |-2x+2| - 4|x-2| \leqslant 0$.

Correction :

1. $|x+1| = |-x+5| \iff x+1 = -x+5$ ou $x+1 = x-5 \iff x = 3$;
2.

x	$-\infty$	-5	1	2	$+\infty$
$\lvert x+5\rvert$	$-x-5$	$x+5$	$x+5$	$x+5$	
$\lvert -2x+2\rvert$	$-2x+2$	$-2x+2$	$2x-2$	$2x-2$	
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$	
$\lvert x+5\rvert+\lvert -2x+2\rvert-4\lvert x-2\rvert$	$x-11$	$3x-1$	$7x-5$	$11-x$	

— Si $x \leqslant -5$, $x-11 \leqslant 0 \iff x \leqslant 11$. Donc $]-\infty,-5]$ est solution.
— Si $-5 \leqslant x \leqslant 1$, $3x-1 \leqslant 0 \iff x \leqslant \frac{1}{3}$. Donc $\left[-5,\frac{1}{3}\right]$ est solution.
— Si $1 \leqslant x \leqslant 2$, $7x-5 \leqslant 0 \iff x \leqslant \frac{5}{7}$. Donc pas de solution sur cet intervalle.
— Si $2 \leqslant x$, $11-x \leqslant 0 \iff x \geqslant 11$. Donc $[11,+\infty[$ est solution.

Bilan : $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty,\frac{1}{3}\right] \cup [11,+\infty[}$.

Nombres réels et calculs matriciels

Question de cours : Caractérisation de la borne supérieure.

Exercice 1 : Soient x et y dans $]-1,1[$.

Montrer que $\dfrac{x+y}{1+xy} \in]-1,1[$.

Correction : $|x|<1$ et $|y|<1$ donc $|xy|<1$, et en particulier $0<1+xy$: la quantité est bien définie.

$(1-x)(1-y)>0$ donc $1-x-y+xy>0$ et $x+y<1+xy$. On divise par $1+xy>0$: $\dfrac{x+y}{1+xy}<1$.

$(x+1)(x+1)>0$ donc $1+x+y+xy>0$ et $x+y>-1-xy$. On divise par $1+xy>0$: $\dfrac{x+y}{1+xy}>-1$.

Exercice 2 : Soit $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(\mathrm{A}+\mathrm{I})^3$.
2. En déduire que A est inversible.

Exercice 3 : Représenter la fonction $x \mapsto x-\lfloor x \rfloor$.

Nombres réels et calculs matriciels

Question de cours : Définition et linéarité de la trace. Invariance par similitude.

Exercice 1 : Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$. On pose $m = \dfrac{x+y}{2}$ (moyenne arithmétique) et $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y})$ (moyenne harmonique).

Montrer que $x \leqslant h \leqslant m \leqslant y$.

Correction : Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$.

1. On a déjà $x = \dfrac{x+x}{2} \leqslant \dfrac{x+y}{2} = m \leqslant \dfrac{y+y}{2} = y$ et donc $x \leqslant m \leqslant y$.

   (on peut aussi écrire : $m - x = \dfrac{x+y}{2} - x = \dfrac{y-x}{2} \geqslant 0$).
2. On a ensuite $x = \sqrt{x.x} \leqslant \sqrt{xy} = g \leqslant \sqrt{y.y} = y$ et donc $x \leqslant g \leqslant y$.
3. $m - g = \dfrac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \dfrac{1}{2}((\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{xy} + (\sqrt{y})^2) = \dfrac{1}{2}(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 \geqslant 0$ et donc, $x \leqslant g \leqslant m \leqslant y$.
4. D'après 1), la moyenne arithmétique de $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$ est comprise entre $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$, ce qui fournit $\dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{h} \leqslant \dfrac{1}{x}$, ou encore $x \leqslant h \leqslant y$.
5. D'après 3), la moyenne géométrique des deux réels $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$ est inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique. Ceci fournit $\sqrt{\dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{y}} \leqslant \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y})$ ou encore $\dfrac{1}{g} \leqslant \dfrac{1}{h}$ et finalement

$$x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant y \text{ où } \frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right),\ g = \sqrt{xy} \text{ et } m = \frac{x+y}{2}.$$

Exercice 2 : Soit

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{B} = \mathrm{A} - \mathrm{I}.$$

Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n.

Exercice 3 : Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

1. $[0,1]\cap\mathbb{Q}$
2. $]0,1[\cap\mathbb{Q}$
3. $\mathbb{N}$
4. $\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n^2}\mid n\in\mathbb{N}^*\right\}$

Correction :

1. $[0,1]\cap\mathbb{Q}$. Les majorants : $[1,+\infty[$. Les minorants : $]-\infty,0]$. La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Le plus grand élément : 1. Le plus petit élément 0.
2. $]0,1[\cap\mathbb{Q}$. Les majorants : $[1,+\infty[$. Les minorants : $]-\infty,0]$. La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Il n'existe pas de plus grand élément ni de plus petit élément.
3. $\mathbb{N}$. Pas de majorants, pas de borne supérieure, ni de plus grand élément. Les minorants : $]-\infty,0]$. La borne inférieure : 0. Le plus petit élément : 0.
4. $\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n^2}\mid n\in\mathbb{N}^*\right\}$. Les majorants : $[\dfrac{5}{4},+\infty[$. Les minorants : $]-\infty,-1]$. La borne supérieure : $\dfrac{5}{4}$. La borne inférieure : -1. Le plus grand élément : $\dfrac{5}{4}$. Pas de plus petit élément.

Nombres réels et calculs matriciels

Question de cours : CNS d'inversibilité d'une matrice triangulaire.

Exercice 1 : Proposer un encadrement des quantités suivantes de $\dfrac{2x^2-x+1}{x^2+\sqrt{x+2}+3}$ pour $x \in [-1,1]$.

Exercice 2 :

1. Pour $n \geqslant 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par X^2-3X+2.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
3. Déduire de la question précédente la valeur de A^n, pour $n \geqslant 2$.

Exercice 3 :

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
2. En déduire la partie entière de $A = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{10000}}$.

Nombres réels et calculs matriciels

Question de cours : Caractérisation des intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$.

Exercice 1 :

1. Montrer que $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$ pour tous $x, y \geqslant 0$.
2. En déduire que pour tous $x, y > 0$:

$$\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{x^2+y^4} \leqslant \frac{1}{xy}.$$

Exercice 2 : Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(\mathrm{A} + \mathrm{I}_3)^3$.
2. Montrer que A est inversible et donner A^{-1}.
3. Déterminer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction :

1. Calculer $(A + I_3)^3 = 0_3$.
2. $A^3 + 3A^2 + 3A + I_3 = 0_3$ donc $A(-A^2 + 3A - I_3) = I_3$ et $A^{-1} = -A^2 + 3A - I_3$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -a & -a \\ -1 & -1-a & -a \\ 1 & a & a-1 \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer $A^n = [(A + I_3) - I_3]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (A + I_3)^k = I_3 - n(A + I_3) + \frac{n(n-1)}{2}(A + I_3)^2$

$$\begin{aligned} A^n &= I_3 - n \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & -a & -a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -na & -na \\ -n & 1 + \frac{n(n-1)}{2}a & +\frac{n(n-1)}{2}a \\ n & -\frac{n(n-1)}{2}a & 1 - \frac{n(n-1)}{2}a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 3 : Soit $A = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Déterminer sup A et inf A.

Correction : Posons pour n entier naturel non nul $u_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$ de sorte que

$$A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}^*\} = \left\{0, \frac{1}{2}+1, \frac{1}{3}-1, \frac{1}{4}+1, \frac{1}{5}-1, \dots\right\}.$$

Pour $n \geqslant 1$, $u_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$. Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $1 < u_{2n} \leqslant \frac{3}{2}$.

Et pour $n \geqslant 1$, $u_{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1}$. Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $-1 < u_{2n-1} \leqslant 0$.

Par suite, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ -1 < u_n \leqslant \frac{3}{2}$.

Donc, sup A et inf A existent dans $\mathbb{R}$ et, en particulier,

$$-1 \leqslant \text{inf } A \leqslant \text{sup } A \leqslant \frac{3}{2}.$$

Comme $u_2 = \frac{3}{2}$ la borne supérieure est atteinte et on a :

$$\boxed{\sup A = \max A = \frac{3}{2}.}$$

Enfin, pour chaque entier naturel non nul n, on a

$$-1 \leqslant \text{inf } A \leqslant u_{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1}.$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$\boxed{\inf A = -1.}$$

(cette borne inférieure n'est pas un minimum).

Nombres réels et calculs matriciels

Question de cours : Propriétés de la transposition : linéarité, involutivité et contravariance de la transposée d'un produit.

Exercice 1 : Si a et b sont des réels positifs ou nuls, montrer que :

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqslant 2\sqrt{a+b}.$$

Correction :

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqslant 2\sqrt{a+b} \Leftrightarrow (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \leqslant 2(a+b)$$

car les termes sont positifs, et la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. évaluons la différence $2(a+b)-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$:

$$2(a+b)-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0.$$

Donc par l'équivalence, nous obtenons l'inégalité recherchée.

Exercice 2 : Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que :

$$\forall\, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{AB} = \mathrm{BA} \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \mathrm{A} = \lambda.\mathrm{I}_n$$

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $|x+1| = |-x+5|$;
2. $|x+5| + |-2x+2| - 4|x-2| \leqslant 0.$

Nombres réels et calculs matriciels

Question de cours : Caractérisation de la borne supérieure.

Exercice 1 : Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$. On pose $m = \dfrac{x+y}{2}$ (moyenne arithmétique) et $g = \sqrt{xy}$ (moyenne géométrique).

Montrer que $x \leqslant g \leqslant m \leqslant y$.

Correction : Soients x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$.

1. On a déjà $x = \dfrac{x+x}{2} \leqslant \dfrac{x+y}{2} = m \leqslant \dfrac{y+y}{2} = y$ et donc $x \leqslant m \leqslant y$.

   (on peut aussi écrire : $m - x = \dfrac{x+y}{2} - x = \dfrac{y-x}{2} \geqslant 0$).
2. On a ensuite $x = \sqrt{x.x} \leqslant \sqrt{xy} = g \leqslant \sqrt{y.y} = y$ et donc $x \leqslant g \leqslant y$.
3. $m - g = \dfrac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \dfrac{1}{2}((\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{xy} + (\sqrt{y})^2) = \dfrac{1}{2}(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 \geqslant 0$ et donc, $x \leqslant g \leqslant m \leqslant y$.
4. D'après 1), la moyenne arithmétique de $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$ est comprise entre $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$, ce qui fournit $\dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{h} \leqslant \dfrac{1}{x}$, ou encore $x \leqslant h \leqslant y$.
5. D'après 3), la moyenne géométrique des deux réels $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$ est inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique. Ceci fournit $\sqrt{\dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{y}} \leqslant \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y})$ ou encore $\dfrac{1}{g} \leqslant \dfrac{1}{h}$ et finalement

$$x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant y \text{ où } \frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right),\ g = \sqrt{xy} \text{ et } m = \frac{x+y}{2}.$$

Exercice 2 : Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathrm{A}^2 - 3\mathrm{A} + 2\mathrm{I}_3$. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Exercice 3 : Représenter la fonction et $x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

Nombres réels et calculs matriciels

Question de cours : L'application $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Exercice 1 : Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$. On pose $g = \sqrt{xy}$ (moyenne géométrique) et $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y})$ (moyenne harmonique).

Montrer que $x \leqslant h \leqslant g \leqslant y$.

Correction : Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$.

1. On a déjà $x = \dfrac{x+x}{2} \leqslant \dfrac{x+y}{2} = m \leqslant \dfrac{y+y}{2} = y$ et donc $x \leqslant m \leqslant y$.

   (on peut aussi écrire : $m - x = \dfrac{x+y}{2} - x = \dfrac{y-x}{2} \geqslant 0$).
2. On a ensuite $x = \sqrt{x.x} \leqslant \sqrt{xy} = g \leqslant \sqrt{y.y} = y$ et donc $x \leqslant g \leqslant y$.
3. $m - g = \dfrac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \dfrac{1}{2}((\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{xy} + (\sqrt{y})^2) = \dfrac{1}{2}(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 \geqslant 0$ et donc, $x \leqslant g \leqslant m \leqslant y$.
4. D'après 1), la moyenne arithmétique de $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$ est comprise entre $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$, ce qui fournit $\dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{h} \leqslant \dfrac{1}{x}$, ou encore $x \leqslant h \leqslant y$.
5. D'après 3), la moyenne géométrique des deux réels $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$ est inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique. Ceci fournit $\sqrt{\dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{y}} \leqslant \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y})$ ou encore $\dfrac{1}{g} \leqslant \dfrac{1}{h}$ et finalement

$$x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant y \text{ où } \frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right),\ g = \sqrt{xy} \text{ et } m = \frac{x+y}{2}.$$

Exercice 2 : Déterminer le centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *i.e.* $\{\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \forall\, \mathrm{X} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{MX} = \mathrm{XM}\}$.

Exercice 3 : Montrer que :

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Trouver une formule pour $\max(x,y,z)$.

Correction : Explicitons la formule pour $\max(x,y)$.

Si $x \geqslant y$, alors $|x-y| = x-y$ donc $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+x-y) = x$.

De même si $x \leqslant y$, alors $|x-y| = -x+y$ donc $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y-x+y) = y$.

Pour trois éléments, nous avons $\max(x,y,z) = \max\big(\max(x,y), z\big)$, donc d'après les formules pour deux éléments :

$$\begin{aligned}
\max(x,y,z) &= \frac{\max(x,y) + z + |\max(x,y) - z|}{2} \\
&= \frac{\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) + z + \left|\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) - z\right|}{2}.
\end{aligned}$$

Nombres réels et calculs matriciels

Question de cours : Si $X \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$ est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.

Exercice 1 : Déterminer le plus petit intervalle contenant les produits xy où x et y sont des réels quelconques des intervalles $]-1, 2[$ et $\left]-\frac{1}{3} ; \frac{1}{2}\right[$.

Exercice 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Exercice 3 : Déterminer la borne supérieure et inférieure (si elles existent) de :

$$A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

en posant $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n}$ sinon.

Correction : $(u_{2k})_k$ tend vers $+\infty$ et donc A ne possède pas de majorant, ainsi A n'a pas de borne supérieure.

D'autre part toutes les valeurs de (u_n) sont positives et $(u_{2k+1})_k$ tend vers 0, donc $\inf A = 0$.

Nombres réels et calculs matriciels

Question de cours : $\mathbb{R}$ est archimédien.

Exercice 1 :

1. Montrer que $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$ pour tous $x, y > 0$.
2. En déduire que pour tous $a, b, c > 0$:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$$

À quelle condition a-t-on égalité ?

Exercice 2 : Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer les réels a, b, c tels que $\mathrm{A}^3 = a\mathrm{A}^2 + b\mathrm{A} + c\mathrm{I}_3$.

Correction : $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A}^3 = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 0 \\ 14 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$.

En cherchant a, b, c, on tombe sur un système lié : $\begin{cases} 5a + b + c = 13 \\ 4a + 2b = 14 \\ 9a + 3b + c = 27 \end{cases}$.

Il y a une infinité de solutions $a = 2 - \dfrac{1}{3}c$ et $b = 3 + \dfrac{2}{3}c$.

C'est parce qu'on a déjà $\mathrm{A}^2 = 2\mathrm{A} + 3\mathrm{I}_3$.

Exercice 3 : Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (x \in \mathbb{Z}) \iff (\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \lfloor nx \rfloor = n \lfloor x \rfloor)$.

Correction :

$\Rightarrow$: Supposons que $x \in \mathbb{Z}$. Alors $\lfloor x \rfloor = x$.

On a aussi $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad nx \in \mathbb{Z}$ donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \lfloor nx \rfloor = nx = n \lfloor x \rfloor$.

$\Leftarrow$: Montrons la contraposée : si $x \notin \mathbb{Z}$ alors $\exists n \in \mathbb{N}, \quad \lfloor nx \rfloor \neq n \lfloor x \rfloor$.

Notons $x = \lfloor x \rfloor + \epsilon$ avec $\epsilon \in]0, 1[$.

$\mathbb{R}$ étant archimédien, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \epsilon > 1$.

On a donc $\lfloor n_0 x \rfloor = \lfloor n_0 \lfloor x \rfloor + n_0 \epsilon \rfloor = n_0 \lfloor x \rfloor + \lfloor n_0 \epsilon \rfloor \geqslant n_0 \lfloor x \rfloor + 1$. Donc $\lfloor n_0 x \rfloor \neq n_0 \lfloor x \rfloor$. CQFD

Nombres réels et calculs matriciels

Question de cours : Existence et unicité de la partie entière.

Exercice 1 : 1. Montrer que $\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqslant \sqrt{2}\sqrt{x+y}$ pour tous $x, y \geqslant 0$.

2. En déduire que pour tous $x, yz \geqslant 0$:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leqslant \sqrt{\frac{x+y}{2}}+\sqrt{\frac{y+z}{2}}+\sqrt{\frac{z+x}{2}}.$$

3. En déduire que si a, b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle quelconque :

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

Exercice 2 : Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est-à -dire qu'il existe $p \geqslant 1$ tel que $\mathrm{A}^p = 0$.

1. Calculer $(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})(\mathrm{I}_n + \mathrm{A} + \ldots + \mathrm{A}^{p-1})$.
2. En déduire que la matrice $\mathrm{I}_n - \mathrm{A}$ est inversible, et donner son inverse.

Exercice 3 : Soit $\mathrm{A} = \left\{ \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$.

Montrer que A admet une borne inférieure, et la calculer.

Correction : A est non vide, et minoré par 0. Donc il admet une borne inférieure.

$\forall\, x \in [0,1[, \quad \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \geqslant 1.$

$\forall\, x \in]1,+\infty[, \quad \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor \geqslant 1.$

Et si $x = 2$, $\lfloor x \rfloor + \dfrac{1}{x} = 2.$

Par conséquent, 1 minore A : $\inf \mathrm{A} \geqslant 1$.

Or $1 \in \mathrm{A}$ (en prenant $x = 1,5$ par exemple) : d'où $\inf \mathrm{A} \leqslant 1$. Conclusion : $\boxed{\inf \mathrm{A} = 1}$.