Fichiers Matrices a, b et c

Exercices faciles :

Exercice 1 : Soient a et b des réels non nuls, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à -dire telles que $AB = BA$.

Exercice 2 : Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que :

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = BA \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, A = \lambda.I_n$$

Exercice 3 : Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que :

$$\forall D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}), \quad AD = DA \iff A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K}).$$

Exercice 4 : Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 5 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Exercice de difficulté moyenne :

Exercice 1 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer :

$$\Big(\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \mathrm{tr}\,(AX) = \mathrm{tr}\,(BX)\Big) \implies A = B.$$

Exercice 2 : Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *i.e.* $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), MX = XM\}$.

Exercice 3 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A + I)^3$.
2. En déduire que A est inversible.

Exercice 4 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Exercice 5 : Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $M^2 + M$.
2. En déduire que M est inversible et calculer M^{-1}.

Correction :

1 $M^2 + M = 2I_2$.

2 $M[\frac{1}{2}(M + I_2)] = I_2$ donc M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{2}(M + I_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - I.$$

Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n.

Exercice 7 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer les réels a, b, c tels que $A^3 = aA^2 + bA + cI_3$.

Correction : $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 0 \\ 14 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$.

En cherchant a, b, c, on tombe sur un système lié : $\begin{cases} 5a + b + c = 13 \\ 4a + 2b = 14 \\ 9a + 3b + c = 27 \end{cases}$.

Il y a une infinité de solutions $a = 2 - \frac{1}{3}c$ et $b = 3 + \frac{2}{3}c$.

C'est parce qu'on a déjà $A^2 = 2A + 3I_3$.

Exercice 8 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1 Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, A^n = a_n A^2 + b_n A$.

2 Expliciter a_n et b_n.

Correction : $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $A^3 = A^2 + 2A$ et donc $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n \end{cases}$ et donc $\begin{cases} a_n = \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{6} \\ b_n = \dfrac{2^n - 4(-1)^n}{6} \end{cases}$.

Exercice 9 : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1 Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}, A^n = a_n A + b_n I_3$.

2 Expliciter a_n et b_n.

Correction : $A^2 = 7A - 10I_3$.

On a $\begin{cases} a_{n+1} = 7a_n + b_n \\ b_{n+1} = -10a_n \end{cases}$ et donc $\begin{cases} a_n = \dfrac{5^n - 2^n}{3} \\ b_n = \dfrac{5.2^n - 2.5^n}{3} \end{cases}$.

Exercice 10 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction : $A = I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'où $A^n = (I_3 + N)^n = I_3 + nN + \dfrac{n(n-1)}{2}N^2$.

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est-à -dire qu'il existe $p \geqslant 1$ tel que $A^p = 0$.

1. Calculer $(I_n - A)(I_n + A + \ldots + A^{p-1})$.
2. En déduire que la matrice $I_n - A$ est inversible, et donner son inverse.

Exercice 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A + I_3)^3$.
2. Montrer que A est inversible et donner A^{-1}.
3. Déterminer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction :

1. Calculer $(A + I_3)^3 = 0_3$.
2. $A^3 + 3A^2 + 3A + I_3 = 0_3$ donc $A(-A^2 + 3A - I_3) = I_3$ et $A^{-1} = -A^2 + 3A - I_3$.

   $$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -a & -a \\ -1 & -1-a & -a \\ 1 & a & a-1 \end{pmatrix}.$$
3. Déterminer $A^n = [(A + I_3) - I_3]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (A + I_3)^k = I_3 - n(A + I_3) + \dfrac{n(n-1)}{2}(A + I_3)^2$

$$A^n = I_3 - n\begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & -a & -a \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -na & -na \\ -n & 1+\dfrac{n(n-1)}{2}a & +\dfrac{n(n-1)}{2}a \\ n & -\dfrac{n(n-1)}{2}a & 1-\dfrac{n(n-1)}{2}a \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ \dfrac{1}{m} & 0 & m \\ \dfrac{1}{m^2} & \dfrac{1}{m} & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - I_3)(A + 2I_3)$.
2. Montrer que A est inversible, et déterminer A^{-1}.
3. Soient $B = \frac{1}{3}(A + I_3)$ et $C = -\frac{1}{3}(A - 2I_3)$. Déterminer B^n, C^n puis A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Les relations sont-elles valables pour $n \in \mathbb{Z}$?

Correction :

1. $(A - I_3)(A + 2I_3) = 2A$.
2. De ce fait, $A^2 - A = 2I_3$ ou encore $\frac{1}{2}(A - I_3)A = I_3$:A est inversible, et $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$.
3. $B^n = B$ et $C^n = C$. D'autre part, $BC = CB = 0_3$.

   Ainsi, comme $A = 2B - C$, on obtient en développant : $A^n = 2^n B^n + (-1)^n C^n = 2^n B + (-1)^n C$.

   Ce résultat s'obtient également par division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$:

$$A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}I_3$$

4. Pour $n \in \mathbb{Z}$, les relations $B^n = B$ et $C^n = C$ ne sont plus valables (car B et C ne sont pas inversibles).

   En revanche, $A^n = 2^n B + (-1)^n C$ est toujours valable. En effet,

$$(2^{-n}B + (-1)^{-n}C)A^n = (2^{-n}B + (-1)^{-n}C)(2^n B + (-1)^n C) = B^2 + 0 + 0 + C^2 = B + C = I_3.$$

Exercice 4 : Soit $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de C.
2. Montrer que C est inversible, et déterminer C^{-1}.
3. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, C^n.

Correction : $C^2 - 4C + 4I_3 = 0_3$.
$C^n = n2^{n-1}C + 2^n(1-n)I_3$.

Exercice 5 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Correction : $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0_3$.
2. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. A est-elle inversible ?

Correction : On effectue la division euclidienne de X^n par $X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$:
$X^n = X(X-1)(X-2)Q + a_nX^2 + b_nX + c_n$.

On a $\begin{cases} 1^n = a_n + b_n + c_n \\ 2^n = 4a_n + 2b_n + c_n \\ c_n = 0 \end{cases}$. On obtient $a_n = 2^{n-1} - 1$, $b_n = 2 - 2^{n-1}$ et $c_n = 0$.

Donc $A^n = \dfrac{2.3^n - 3.2^n}{6}A^2 + \dfrac{9.2^n - 4.3^n}{6}A$.

Exercice 7 :

1. Pour $n \geqslant 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
3. Déduire de la question précédente la valeur de A^n, pour $n \geqslant 2$.

Exercice 8 : Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $(M - I_4)^n$.
2. En déduire M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction : Soit $N = M - I_4$. $N^2 = 0_4$. Ainsi $M^n = (I_4 + N)^n = I_4 + nN$.

Exercice 9 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - I_3)(A + 3I_3)$ et en déduire A^2 en fonction de A et I_3.
2. De manière générale, montrer que A^k pour $k \in \mathbb{N}$ s'écrit sous la forme $A^k = a_kA + b_kI_3$.

3 Trouver a_k et b_k.

Correction : $(A - I_3)(A + 3I_3) = 0_3$ donc $A^2 = -2A + 3I_3$.

$$\begin{cases} a_{k+1} = b_k - 2a_k \\ b_{k+1} = 3a_k \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} a_k = \dfrac{1-(-3)^k}{4} \\ b_k = \dfrac{3+(-3)^k}{4} \end{cases}.$$

Exercice 10 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1 Calculer $A(A - 2I_3)(A - 3I_3)$.

2 En déduire A^n en fonction de A^2, A et I_3 pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction : $A(A - 2I_3)(A - 3I_3) = 0_3$.

On effectue la division euclidienne de X^n par $X(X-2)(X-3)$:

$X^n = X(X-2)(X-3)Q + a_nX^2 + b_nX + c_n$.

On a $\begin{cases} 2^n = 4a_n + 2b_n + c_n \\ 3^n = 9a_n + 3b_n + c_n \\ c_n = 0 \end{cases}$. On obtient $a_n = \dfrac{2.3^n - 3.2^n}{6}$, $b_n = \dfrac{9.2^n - 4.3^n}{6}$ et $c_n = 0$.

Donc $A^n = \dfrac{2.3^n - 3.2^n}{6} A^2 + \dfrac{9.2^n - 4.3^n}{6} A$.

Exercice 11 : Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1 Montrer que $(I_3 + A)^3 = 0_3$.

2 En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction : Soit $N = I_3 + A$. On a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & -a & -a \end{pmatrix}$ et effectivement $N^3 = 0_3$.

De ce fait, $A^n = (N - I_3)^n = (-1)^n \left(I_3 - nN + \dfrac{n(n-1)}{2} N^2 \right)$.