Fichiers Nombres-Reels a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si possible de tête $\dfrac{16^{n+1}}{3}+\dfrac{(-4)^{2n+1}}{5}+\dfrac{(-2)^{4n}}{6}$.

Exercice 2 : Étudier le signe de $x+\sqrt{1+x^2}$.

Exercice 3 : Si a et b sont des réels positifs ou nuls, montrer que :

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqslant 2\sqrt{a+b}.$$

Correction :

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqslant 2\sqrt{a+b} \Leftrightarrow (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \leqslant 2(a+b)$$

car les termes sont positifs, et la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. évaluons la différence $2(a+b)-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$:

$$2(a+b)-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0.$$

Donc par l'équivalence, nous obtenons l'inégalité recherchée.

Exercice 4 : Soient x et y deux réels tels que $0<x\leqslant y$. On pose $m=\dfrac{x+y}{2}$ (moyenne arithmétique), $g=\sqrt{xy}$ (moyenne géométrique) et $\dfrac{1}{h}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})$ (moyenne harmonique).
Montrer que $x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant y$.

Correction : Soient x et y deux réels tels que $0<x\leqslant y$.

1. On a déjà $x=\dfrac{x+x}{2} \leqslant \dfrac{x+y}{2} = m \leqslant \dfrac{y+y}{2}=y$ et donc $\boxed{x \leqslant m \leqslant y}$.
   (on peut aussi écrire : $m-x=\dfrac{x+y}{2}-x=\dfrac{y-x}{2}\geqslant 0$).
2. On a ensuite $x=\sqrt{x.x}\leqslant\sqrt{xy}=g\leqslant\sqrt{y.y}=y$ et donc $\boxed{x \leqslant g \leqslant y}$.
3. $m-g=\dfrac{x+y}{2}-\sqrt{xy}=\dfrac{1}{2}((\sqrt{x})^2-2\sqrt{xy}+(\sqrt{y})^2)=\dfrac{1}{2}(\sqrt{y}-\sqrt{x})^2\geqslant 0$ et donc, $\boxed{x \leqslant g \leqslant m \leqslant y}$.
4. D'après 1), la moyenne arithmétique de $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$ est comprise entre $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$, ce qui fournit $\dfrac{1}{y}\leqslant\dfrac{1}{h}\leqslant\dfrac{1}{x}$, ou encore $\boxed{x \leqslant h \leqslant y}$.
5. D'après 3), la moyenne géométrique des deux réels $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{y}$ est inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique. Ceci fournit $\sqrt{\dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{y}}\leqslant\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})$ ou encore $\dfrac{1}{g}\leqslant\dfrac{1}{h}$ et finalement

$$\boxed{x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant y \text{ où } \frac{1}{h}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right),\ g=\sqrt{xy} \text{ et } m=\frac{x+y}{2}.}$$

Exercice 5 : Résoudre en fonction du paramètre $a\in\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=a$ d'inconnue $x\geqslant 0$.

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Soient x et y dans $]-1,1[$.

Montrer que $\dfrac{x+y}{1+xy} \in]-1,1[$.

Correction : $|x|<1$ et $|y|<1$ donc $|xy|<1$, et en particulier $0<1+xy$: la quantité est bien définie.

$(1-x)(1-y)>0$ donc $1-x-y+xy>0$ et $x+y<1+xy$. On divise par $1+xy>0$: $\dfrac{x+y}{1+xy}<1$.

$(x+1)(x+1)>0$ donc $1+x+y+xy>0$ et $x+y>-1-xy$. On divise par $1+xy>0$: $\dfrac{x+y}{1+xy}>-1$.

Exercice 2 : Déterminer le plus petit intervalle contenant les produits xy où x et y sont des réels quelconques des intervalles $]-1,2[$ et $\left]-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right[$.

Exercice 3 : $a, b \in \mathbb{R}_+^\star$.

1. Ordonner $\dfrac{a+b}{2}$ et $\sqrt{ab}$.
2. Montrer que leur distance est majorée par $\dfrac{|b-a|^3}{8ab}$.

Correction : Par symétrie, on peut supposer que $a \leqslant b$.

$\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\dfrac{(b-a)^2}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$.

Donc $\dfrac{(b-a)^2}{8b} \leqslant \dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{8a}$.

$d\left(\dfrac{a+b}{2},\sqrt{ab}\right) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{8}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right) \leqslant \dfrac{(b-a)^3}{8ab}$.

Exercice 4 : Proposer un encadrement des quantités suivantes de $\dfrac{2x^2-x+1}{x^2+\sqrt{x+2}+3}$ pour $x \in [-1,1]$.

Exercice 5 : Proposer un encadrement des quantités suivantes de $\dfrac{x-y^2+3}{x^2+y^2-y}$ pour tous $x, y \in [1,2]$.

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Soient $x, y \geqslant 0$.

1. Montrer que $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{y}$.
2. En déduire que si $x \geqslant y$: $\sqrt{x}-\sqrt{y} \leqslant \sqrt{x-y}$.
3. En déduire que $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$.

Exercice 2 :

1. Montrer que $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$ pour tous $x, y \geqslant 0$.
2. En déduire que pour tous $x, y > 0$:

$$\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{x^2+y^4} \leqslant \frac{1}{xy}.$$

Exercice 3 : Soient $a, b, c > 0$ trois réels de somme s.

1. Montrer que $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} \geqslant 2$ pour tous $x, y>0$.
2. En déduire que :
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant 6-s \quad \text{et} \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{s}.$$
3. De ces deux inégalités, l'une est-elle meilleure que l'autre, et si oui laquelle ?

Exercice 4 :

1. Montrer que $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} \geqslant 2$ pour tous $x, y>0$.
2. En déduire que pour tous $a, b, c>0$:
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$$
À quelle condition a-t-on égalité ?

Exercice 5 :

1. Montrer que $\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqslant \sqrt{2}\sqrt{x+y}$ pour tous $x, y \geqslant 0$.
2. En déduire que pour tous $x, yz \geqslant 0$:
$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leqslant \sqrt{\frac{x+y}{2}}+\sqrt{\frac{y+z}{2}}+\sqrt{\frac{z+x}{2}}.$$
3. En déduire que si a, b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle quelconque :
$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$