Fichiers Nombres-Reels-Borne-Sup a, b et c

Exercices faciles : _____

Exercice 1 : Montrer que :

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

Trouver une formule pour $\max(x, y, z)$.**Correction :** Explicitons la formule pour $\max(x, y)$.Si $x \geq y$, alors $|x - y| = x - y$ donc $\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y + x - y) = x$.De même si $x \leq y$, alors $|x - y| = -x + y$ donc $\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y - x + y) = y$.Pour trois éléments, nous avons $\max(x, y, z) = \max(\max(x, y), z)$, donc d'après les formules pour deux éléments :

$$\begin{aligned} \max(x, y, z) &= \frac{\max(x, y) + z + |\max(x, y) - z|}{2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) + z + \left| \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) - z \right|}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 2 : Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

1. $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$

2. $]0, 1[\cap \mathbb{Q}$

3. $\mathbb{N}$

4. $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$

Correction :1. $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Les majorants : $[1, +\infty[$. Les minorants : $] - \infty, 0]$. La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Le plus grand élément : 1. Le plus petit élément 0.2. $]0, 1[\cap \mathbb{Q}$. Les majorants : $[1, +\infty[$. Les minorants : $] - \infty, 0]$. La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Il n'existe pas de plus grand élément ni de plus petit élément.3. $\mathbb{N}$. Pas de majorants, pas de borne supérieure, ni de plus grand élément. Les minorants : $] - \infty, 0]$. La borne inférieure : 0. Le plus petit élément : 0.4. $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Les majorants : $\left[\frac{5}{4}, +\infty[$. Les minorants : $] - \infty, -1]$. La borne supérieure : $\frac{5}{4}$. La borne inférieure : -1 . Le plus grand élément : $\frac{5}{4}$. Pas de plus petit élément.

Exercice 3 : Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées.

Montrer que $\sup A \cup B$ existe et que $\sup A \cup B = \max(\sup A, \sup B)$.

Correction : $A, B, A \cup B$ sont non vides et majorés. Ils admettent donc tous une borne supérieure.

Comme $\sup A \leq \max(\sup A, \sup B)$, A est majoré par $\max(\sup A, \sup B)$. De même, B est majoré par $\max(\sup A, \sup B)$.

Par conséquent, $A \cup B$ est majoré par $\max(\sup A, \sup B)$ et donc : $\sup A \cup B \leq \max(\sup A, \sup B)$.

D'autre part, $A \subset A \cup B$. Donc $\sup A \leq \sup A \cup B$. De même, $\sup B \leq \sup A \cup B$.

Et donc $\max(\sup A, \sup B) \leq \sup A \cup B$.

Exercice 4 : Soient A une partie bornée et non vide de $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On définit $\lambda A = \{\lambda a, a \in A\}$.

Montrer que lorsque $\lambda > 0$, on a $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$.

Que se passe-t-il si $\lambda \leq 0$?

Exercice 5 : A et B sont deux parties bornées et non vides de $\mathbb{R}$.

On définit $A + B = \{a + b, (a, b) \in A \times B\}$ et $A - B = \{a - b, (a, b) \in A \times B\}$.

Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ et $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$.

Exercice de difficulté moyenne : _____

Exercice 1 : Déterminer la borne supérieure et inférieure (si elles existent) de :

$$A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

en posant $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n}$ sinon.

Correction : $(u_{2k})_k$ tend vers $+\infty$ et donc A ne possède pas de majorant, ainsi A n'a pas de borne supérieure.

D'autre part toutes les valeurs de (u_n) sont positives et $(u_{2k+1})_k$ tend vers 0, donc $\inf A = 0$.

Exercice 2 : Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$\mathbb{N} \quad \text{et} \quad \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Correction :

$\mathbb{N}$: Pas de majorants, pas de borne supérieure, ni de plus grand élément. Les minorants : $] - \infty, 0]$. La borne inférieure : 0. Le plus petit élément : 0.

$\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$: Les majorants : $\left[\frac{5}{4}, +\infty \right[$.

Les minorants : $] - \infty, -1]$.

La borne supérieure : $\frac{5}{4}$. La borne inférieure : -1 .

Le plus grand élément : $\frac{5}{4}$. Pas de plus petit élément.

Exercice 3 : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que $\forall a \in A, \alpha \leq a \leq \beta$.

On pose $B = \left\{ \frac{1}{a}, a \in A \right\}$.

Montrer que B est bornée ; exprimer ses bornes supérieures et inférieures en fonction de celles de A.

Exercice 4 : L'ensemble suivant est-il majoré, minoré ?

Admet-il une borne supérieure, une borne inférieure, un plus grand élément, un plus petit élément ?

$$A = \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Exercice 5 : L'ensemble suivant est-il majoré, minoré ?

Admet-il une borne supérieure, une borne inférieure, un plus grand élément, un plus petit élément ?

$$B = \left\{ \frac{1 + (-1)^n}{n} - n^2, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Exercices plus ardu : _____

Exercice 1 : Soit $A = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Déterminer $\sup A$ et $\inf A$.

Correction : Posons pour n entier naturel non nul $u_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$ de sorte que

$$A = \{u_n, n \in \mathbb{N}^*\} = \left\{ 0, \frac{1}{2} + 1, \frac{1}{3} - 1, \frac{1}{4} + 1, \frac{1}{5} - 1, \dots \right\}.$$

Pour $n \geq 1$, $u_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 < u_{2n} \leq \frac{3}{2}$.

Et pour $n \geq 1$, $u_{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-1 < u_{2n-1} \leq 0$.

Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-1 < u_n \leq \frac{3}{2}$.

Donc, $\sup A$ et $\inf A$ existent dans $\mathbb{R}$ et, en particulier,

$$-1 \leq \inf A \leq \sup A \leq \frac{3}{2}.$$

Comme $u_2 = \frac{3}{2}$ la borne supérieure est atteinte et on a :

$$\boxed{\sup A = \max A = \frac{3}{2}}.$$

Enfin, pour chaque entier naturel non nul n , on a

$$-1 \leq \inf A \leq u_{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1}.$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$\boxed{\inf A = -1}.$$

(cette borne inférieure n'est pas un minimum).

Exercice 2 : Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$.

1. Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leq \inf B$.
2. Montrer que $\sup A = \inf B \iff \forall \epsilon > 0, \exists a \in A, \exists b \in B, b - a \leq \epsilon$.

On dit dans ce cas que A et B sont **adjacentes**.

3. Donner un exemple de parties adjacentes.

Correction : Comme B est non vide, en prenant $b \in B$, on a $\forall a \in A, a \leq b$: A est majoré par b . Comme il est non vide, il admet une borne supérieure.

De même, B est non vide et minoré (par tout élément de A). Il admet une borne supérieure.

Comme A est majoré par tout élément $b \in B$, on a $\forall b \in B, \sup A \leq b$.

On en déduit que $\sup A$ est un minorant de B et par conséquent, $\sup A \leq \inf B$.

Exercice 3 : Soit $A = \left\{ \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$.

Montrer que A admet une borne inférieure, et la calculer.

Correction : A est non vide, et minoré par 0. Donc il admet une borne inférieure.

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geq 1.$$

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor \geq 1.$$

$$\text{Et si } x = 2, \quad \lfloor x \rfloor + \frac{1}{x} = 2.$$

Par conséquent, 1 minore A : $\inf A \geq 1$.

Or $1 \in A$ (en prenant $x = 1,5$ par exemple) : d'où $\inf A \leq 1$. Conclusion : $\boxed{\inf A = 1}$.

Exercice 4 : Soit A une partie bornée et non vide de $\mathbb{R}$. On définit l'ensemble $L = \{|y - x|, (x, y) \in A^2\}$.

Montrer que L admet une borne supérieure et que $\sup L = \sup A - \inf A$.

Correction : A est non vide. Considérons donc $a \in A$. En prenant $x = y = a$, on a donc $0 \in L$: L est non vide.

A étant bornée, considérons $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A, |x| \leq M$.

On a alors $\forall (x, y) \in A^2, |y - x| \leq |x| + |y| \leq 2M$: L est majoré par $2M$.

L admet donc une borne supérieure $\sup L$.

— Soient x et y dans A . On a $x - y \leq \sup A - \inf A$, et de la même manière, $y - x \leq \sup A - \inf A$.

On en conclut que $|x - y| \leq \sup A - \inf A$, et donc $\sup L \leq \sup A - \inf A$.

— Montrons désormais que $\sup L \geq \sup A - \inf A$ en prouvant que $\sup A \leq \sup L + \inf A$

Soit $x \in A$.

Pour tout $y \in A$, on a $x - y \leq |x - y| \leq \sup L$. Par conséquent $-\sup L \leq y - x$ et encore $x - \sup L \leq y$.

On en déduit que $x - \sup L \leq \inf A$, ou encore que $x \leq \inf A + \sup L$.

Comme c'est valable pour tout $x \in A$, $\inf A + \sup L$ est un majorant de A .

On a alors $\sup A \leq \sup L + \inf A$, soit $\sup L \geq \sup A - \inf A$. CQFD.