Fichiers Nombres-Reels-Valeurs-Absolues a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Simplifier $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$.

Correction : $\left(\sqrt{a-1}+1\right)^2=a+2\sqrt{a-1}$ donc $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}=|\sqrt{a-1}+1|$.

Exercice 2 : Soient x et y deux réels vérifiant $\left|x-\dfrac{1}{2}\right|\leqslant\dfrac{1}{4}$ et $|y+1|\leqslant\dfrac{1}{2}$.

Montrer que $\left|\dfrac{x}{y}+\dfrac{5}{6}\right|\leqslant\dfrac{2}{3}$.

Exercice 3 : Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Déterminer la partie du plan définie par :

1. $|x|+|y|=1$;
2. $|x+y|=1$.

Exercice 4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $|x+1|=|-x+5|$;
2. $|x+5|+|-2x+2|-4|x-2|\leqslant 0$.

Exercice 5 : Résoudre $|x+y|+y=|x-y|-y$. Représentation graphique des solutions.

Exercice 6 : Résoudre $||x+y|-|x-y||\leqslant 2$. Représentation graphique des solutions.

Correction : NB : si $(x,y)\in\mathrm{E}$ alors $(\pm x,\pm y)\in\mathrm{E}$. On peut travailler pour $x\geqslant 0$ et $y\geqslant 0$.

Exercice 7 : Résoudre les équations suivantes d'inconnue x :

1. $|4-x|=x$
2. $x+5=\sqrt{x+11}$

Exercice 8 : Résoudre les équations suivantes d'inconnue x :

1. $\left|x^2+x-3\right|=|x|$
2. $x|x|=3x+2$

Exercice 9 : Résoudre les équations suivantes d'inconnue x :

1. $|x+2|+|3x-1|=4$
2. $\sqrt{1-2x}=|x+7|$

Exercice 10 : Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x :

1. $\left|x^2-6x+4\right|\leqslant 1$
2. $x+2<|2x-5|$

Exercice 11 : Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x :

1. $x+2<|2x-5|$
2. $\sqrt{x^2-1}<2-x$

Exercice 12 : Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x :

1. $|3x-5| \leqslant |2x+3|$
2. $\sqrt{|x+2|} \leqslant |x-10|$

Exercice 13 : Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x :

1. $|x-1| \leqslant |2x+1|+1$
2. $x+3 \leqslant \sqrt{x+5}$

Exercice 14 : Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x :

1. $\dfrac{x+5}{x^2-1} \geqslant 1$
2. $|x+3| > |x^2-3|$

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $|x+1| = |-x+5|$;
2. $|x+5| + |-2x+2| - 4|x-2| \leqslant 0$.

Correction :

1. $|x+1| = |-x+5| \iff x+1 = -x+5$ ou $x+1 = x-5 \iff x = 3$;
2.

x	$-\infty$	-5	1	2	$+\infty$
$\lvert x+5\rvert$	$-x-5$	$x+5$	$x+5$	$x+5$	
$\lvert -2x+2\rvert$	$-2x+2$	$-2x+2$	$2x-2$	$2x-2$	
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$	
$\lvert x+5\rvert+\lvert -2x+2\rvert-4\lvert x-2\rvert$	$x-11$	$3x-1$	$7x-5$	$11-x$	

- Si $x \leqslant -5$, $x-11 \leqslant 0 \iff x \leqslant 11$. Donc $]-\infty,-5]$ est solution.
- Si $-5 \leqslant x \leqslant 1$, $3x-1 \leqslant 0 \iff x \leqslant \dfrac{1}{3}$. Donc $\left[-5, \dfrac{1}{3}\right]$ est solution.
- Si $1 \leqslant x \leqslant 2$, $7x-5 \leqslant 0 \iff x \leqslant \dfrac{5}{7}$. Donc pas de solution sur cet intervalle.
- Si $2 \leqslant x$, $11-x \leqslant 0 \iff x \geqslant 11$. Donc $[11,+\infty[$ est solution.

Bilan : $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty, \dfrac{1}{3}\right] \cup [11,+\infty[}$.

Exercice 2 : Montrer que que pour tout $x \in [0,2]\backslash\{1\}$: $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x+\sqrt{x}-2}\right| \leqslant 2$.

Exercice 3 : Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ les expressions suivantes sont-elles bien définies ?

1. $\sqrt{x^2-4|x|+3}$
2. $\dfrac{\ln(2-x)}{x-1-\sqrt{x^2-2}}$

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{2x+5}{x+2}$ est plus près de $\sqrt{5}$ que x ne l'est.

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\frac{2x+5}{x+2} - \sqrt{5} = \frac{2x+5-\sqrt{5}(x+2)}{x+2} = \frac{(2-\sqrt{5})x+(5-2\sqrt{5})}{x+2} = \frac{(2-\sqrt{5})(x-\sqrt{5})}{x+2}.$$

Donc $\left|\frac{2x+5}{x+2} - \sqrt{5}\right| = \left|\frac{2-\sqrt{5}}{x+2}\right| \left|x-\sqrt{5}\right| = \frac{\sqrt{5}-2}{x+2}\left|x-\sqrt{5}\right| \leqslant \frac{\sqrt{5}-2}{2}\left|x-\sqrt{5}\right| < \left|x-\sqrt{5}\right|$.

(En effet, $\frac{\sqrt{5}-2}{2} < 1$ car $\sqrt{5}-2 < 2$ car $\sqrt{5} < 4$.)