Limites I

1. Soient A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.

   On dit que x est *intérieur* à A si A contient un voisinage de x :

$$\exists\, \mathrm{V}_x \in \mathcal{V}(x), \mathrm{V}_x \subset \mathrm{A}.$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. $\overset{\circ}{\overbrace{]a\,;+\infty[}} =]a\,;+\infty[$.

On considère une fonction f à valeurs réelles définie sur un ensemble D de $\mathbb{R}$.

3. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

   On dit que f admet une *limite* b lorsque x tend vers a si, et seulement si

$$\forall\ \mathrm{V}_b \in \mathcal{V}(b),\ \exists\, \mathrm{U}_a \in \mathcal{V}(a)\ /\ \forall\, x \in \mathrm{U}_a \cap \mathrm{D} \implies f(x) \in \mathrm{V}_b.$$

(donner la définition avec les voisinages et que les voisinages)

4. Donner la caractérisation de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ à partir d'inégalités $\leqslant$:

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \beta(\varepsilon) \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \leqslant \beta \implies |f(x) - b| \leqslant \varepsilon \text{ ou } b - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant b + \varepsilon.$$

Limites I

1. On dit que x est *adhérent* à A si A rencontre tout voisinage de x :

$$\forall\ V_x \in \mathcal{V}(x),\ A \cap V_x \neq \emptyset.$$

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. $\overline{[a\,;b]} = [a\,;b]$.

On considère une fonction f à valeurs réelles définie sur un ensemble D de $\mathbb{R}$.

3. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

   On dit que f admet une *limite* b lorsque x tend vers a si, et seulement si

$$\forall\ V_b \in \mathcal{V}(b),\ \exists\, U_a \in \mathcal{V}(a)\ /\ \forall\, x \in U_a \cap D \implies f(x) \in V_b.$$

   (donner la définition avec les voisinages et que les voisinages)

4. Donner la caractérisation de $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ à partir d'inégalités $\leqslant$:

$$\forall\, A \in \mathbb{R},\ \exists\, \alpha(A) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in D,\ |x-a| \leqslant \alpha \text{ ou } a-\alpha \leqslant x \leqslant a+\alpha \implies f(x) \leqslant A.$$