Limites II

1. Donner la caractérisation de $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ où $a, b \in \mathbb{R}$ à l'aide d'intervalles fermés et seulement des intervalles :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \in [a-\alpha\,;a+\alpha] \implies f(x) \in [b-\varepsilon\,;b+\varepsilon]\,.$$

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{5x} - \mathrm{e}^{3x}}{x}$.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{5x} - \mathrm{e}^{3x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{5x} - 1}{x} - \dfrac{\mathrm{e}^{3x} - 1}{x} = \left(\mathrm{e}^{5x}\right)'(0) - \left(\mathrm{e}^{3x}\right)'(0) = 5 - 3 = 2$ en reconnaissant les taux d'accroissement en 0 de deux fonctions dérivables.

3. Soient $\ell,\ \ell' \in \mathbb{R}$. Compléter :

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞
Si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	0	0	∞	ℓ'
alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞	Forme Indéter.	0	∞

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante et majorée. On pose $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque.
   (a) Justifier que $\alpha = \sup\left(\left\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\right\}\right)$ est correctement défini et vérifie $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \alpha + \varepsilon$.

   Par construction, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée donc l'ensemble $\left\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\right\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Elle admet donc une borne supérieure α qui vérifie, par définition :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \alpha \leqslant \alpha + \varepsilon.$$

   (b) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p \geqslant \alpha - \varepsilon$.

   Par définition de α, $\alpha - \varepsilon < \alpha$ n'est pas un majorant de $\left\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\right\}$ donc il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que :

$$u_p \geqslant \alpha - \varepsilon.$$

   (c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

   Par croissance de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \implies u_n \geqslant u_p$. En regroupant les résultats précédents, on a donc prouver que :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, p(\alpha, \varepsilon), \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \implies \alpha - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \alpha + \varepsilon.$$

   C'est la définition de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers α.

Limites II

1. Donner la caractérisation de $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ à l'aide d'intervalles fermés et seulement des intervalles :

$$\forall\, \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \exists\, \beta(\varepsilon) \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \in]-\infty\,;\beta] \implies f(x) \in [\mathrm{A}\,;+\infty[\,.$$

2. Déterminer $\lim_{x \to 0} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \underset{u=\frac{1}{x}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{u \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^u}{u} = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0$ d'après les théorèmes sur les limites de composées et de produits.

3. Soient $\ell,\ \ell' \in \mathbb{R}$. Compléter :

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
Si g a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $f \times g$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	∞	Forme Indéter.	∞

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante et majorée. On pose $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque.

(a) Justifier que $\alpha = \sup\left(\left\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\right\}\right)$ est correctement défini et vérifie $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \alpha + \varepsilon$.

Par construction, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée donc l'ensemble $\left\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\right\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Elle admet donc une borne supérieure α qui vérifie, par définition :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \alpha \leqslant \alpha + \varepsilon.$$

(b) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p \geqslant \alpha - \varepsilon$.

Par définition de α, $\alpha - \varepsilon < \alpha$ n'est pas un majorant de $\left\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\right\}$ donc il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que :

$$u_p \geqslant \alpha - \varepsilon.$$

(c) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

Par croissance de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \implies u_n \geqslant u_p$. En regroupant les résultats précédents, on a donc prouver que :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, p(\alpha, \varepsilon), \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \implies \alpha - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \alpha + \varepsilon.$$

C'est la définition de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers α.