Autour d'une fonction de Lambert

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x\ \mathrm{e}^{-x}$.

Partie A : Définition de la réciproque w de f.

1. Justifier que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations complet.

2. Montrer que f établit une bijection de $\mathrm{I} =]-\infty\,;1]$ sur un intervalle J à préciser.

   On note w la bijection réciproque. Est-elle continue sur J ?

3. Montrer que w est dérivable sur un intervalle J′ strictement inclus dans J que l'on précisera. Justifier que $\forall\, y \in \mathrm{J}',\ \ w'(y) = \dfrac{\mathrm{e}^{w(y)}}{1 - w(y)}$.

On admettra par la suite que la fonction w est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur J′.

4. Calculer $w(0)$ et $w(-\mathrm{e})$ ainsi que $w'(0)$ et $w'(-\mathrm{e})$.

5. Montrer que f admet en $-\infty$ une branche infinie dont on précisera la nature. En déduire la nature de la branche infinie de w en $-\infty$.

6. Donner rapidement les équations des tangentes à la courbe de f en 0, 1 et $-\mathrm{e}$ ainsi que celles de leur symétrique tangentes à la courbe de w.

7. Tracer soigneusement les courbes représentatives de f et w en prenant pour échelle au moins 2 cm sur l'axe des abscisses et des ordonnées.

   On prendra les approximations usuelles des physiciens $\mathrm{e} \simeq 3^{\text{« } - \text{ »}}$ *et* $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \simeq \dfrac{1}{3}^{\text{« } + \text{ »}}$.

Partie B : Calcul d'une primitive W de la réciproque w.

8. Justifier que $\forall\, y \in \mathrm{J},\ w(y)\,\mathrm{e}^{-w(y)} = y$.

9. Si $y \in \mathrm{J}$, après avoir justifié son existence, calculer $\displaystyle\int_0^{w(y)} (t - t^2)\ \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$.

10. Si $y \in \mathrm{J}$, calculer $\displaystyle\int_0^{y} w(x)\,\mathrm{d}x$ en effectuant le changement de variable $t = w(x)$.

11. En déduire que $\mathrm{W} : y \longmapsto y\,w(y) + y + \mathrm{e}^{-w(y)}$ est une primitive de w sur J.

Partie C : Résolution d'une équation différentielle d'ordre deux.

Dans cette partie, on se place sur l'intervalle J' et on s'intéresse à la résolution du problème différentiel d'inconnue z suivant :

$$\begin{cases} z'' + w(y)z' + w'(y)z = w'(y) \\ z'(0) = 0. \end{cases} \tag{E}$$

On définit alors la fonction $\mathrm{Z}\colon y \longmapsto z'(y) + w(y)z(y)$.

12. Montrer que si z est $\mathscr{C}^2$ sur J', alors Z est $\mathscr{C}^1$ sur J'.

13. Soit z une fonction $\mathscr{C}^2$ sur J'. Démontrer que z est solution de (E) si, et seulement si $\mathrm{Z}' = w'$ sur J'.

14. En déduire que z est solution de (E) **et** $z'(0) = 0$ si, et seulement si $\forall\, y \in \mathrm{J}',\ \ \mathrm{Z}(y) = w(y)$.

15. Résoudre sur J, l'équation différentielle

$$z' + w(y)z = w(y). \tag{E'}$$

16. Conclure quant au problème posé.