Autour d'une fonction de Lambert

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

Partie A : Définition de la réciproque w de f.

1. Justifier que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations complet.

Correction : Par produit d'un polynôme et de l'exponentielle d'un polynôme, la fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = (1 - x)\,\mathrm{e}^{-x}$$

qui est du signe de $1 - x$.

Les limites aux bornes sont faciles à trouver d'après les théorèmes sur les limites de produits et de croissances comparées.

On en déduit le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

2. Montrer que f établit une bijection de $\mathrm{I} =]-\infty\,;1]$ sur un intervalle J à préciser.

On note w la bijection réciproque. Est-elle continue sur J ?

Correction : Grâce à ce qui précède, f est **continue** (car $\mathscr{C}^\infty$) sur l'**intervalle** I et est **strictement croissante** sur I.

D'après le théorème du même nom, la fonction f établit donc une bijection de I sur son image $\mathrm{J} = f(\mathrm{I}) = \left]-\infty\,;\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$.

Comme f est continue sur I, le théorème de la bijection assure que sa réciproque $w = f^{-1}$ est continue sur J.

3. Montrer que w est dérivable sur un intervalle J' strictement inclus dans J que l'on précisera. Justifier que $\forall\, y \in \mathrm{J}',\ \ w'(y) = \dfrac{\mathrm{e}^{w(y)}}{1 - w(y)}$.

Correction : D'après la question précédente, f est bijective et dérivable sur I. De plus, sa dérivée est non nulle sur $\mathrm{I}' = \mathrm{I} \setminus \{1\}$. Sa réciproque sera donc dérivable sur $\mathrm{J}' = \mathrm{J} \setminus \left\{ f(1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \right\} = \left] -\infty\,; \dfrac{1}{\mathrm{e}} \right[$.

En outre,

$$\forall\, y \in \left] -\infty\,; \frac{1}{\mathrm{e}} \right[, w'(y) = \frac{1}{f'(w(y))} = \frac{1}{(1-w(y))\,\mathrm{e}^{-w(y)}} = \frac{\mathrm{e}^{w(y)}}{1-w(y)}.$$

On admettra par la suite que la fonction w est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur J'.

4. Calculer $w(0)$ et $w(-\mathrm{e})$ ainsi que $w'(0)$ et $w'(-\mathrm{e})$.

Correction : Comme $f(0) = 0$, on en déduit que $w(0) = 0$ puis $w'(0) = \dfrac{\mathrm{e}^{w(0)}}{1-w(0)} = 1$.

Pour calculer $w(-\mathrm{e})$, il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = -\mathrm{e}$, ce qui donne clairement $x = -1$ (et c'est la seule solution car f est bijective sur $\mathrm{I} =]-\infty\,; 1]$).

Donc $w(-\mathrm{e}) = -1$ puis $w'(-\mathrm{e}) = \dfrac{\mathrm{e}^{w(-\mathrm{e})}}{1-w(-\mathrm{e})} = \dfrac{1}{2\,\mathrm{e}}$.

5. Montrer que f admet en $-\infty$ une branche infinie dont on précisera la nature. En déduire la nature de la branche infinie de w en $-\infty$.

Correction : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} =_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ donc la courbe de f présente une branche parabolique de direction $(\mathrm{O}y)$ en $-\infty$.

Par symétrie par rapport à la première bissectrice, la courbe de w présente une branche parabolique de direction $(\mathrm{O}x)$ en $-\infty$.

6. Donner rapidement les équations des tangentes à la courbe de f en 0, 1 et $-\mathrm{e}$ ainsi que celles de leur symétrique tangentes à la courbe de w.

Correction : Rapidement :

— $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ donnent $(\mathrm{T}_0) : y = x$ confondue avec l'axe de symétrie qui sera donc aussi la tangente à w en 0.

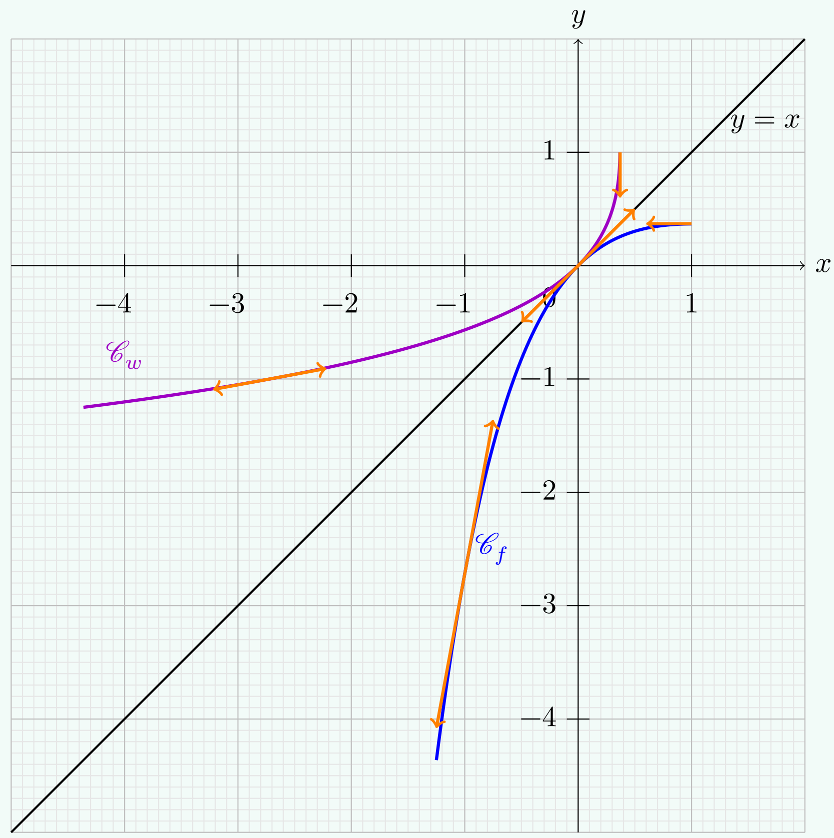
— $f(1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $f'(1) = 0$ donnent $(\mathrm{T}_{1,f}) : y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ parallèle à l'axe des abscisses. La tangente à w en $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ sera donc parallèle à l'axe des ordonnées.

— $w(-\mathrm{e}) = -1$ et $w'(-\mathrm{e}) = \dfrac{1}{2\,\mathrm{e}}$ donnent $(\mathrm{T}_{-\mathrm{e},w}) : y = \dfrac{1}{2\,\mathrm{e}}x - \dfrac{1}{2}$. La tangente à la courbe de f en -1 aura donc pour équation $(\mathrm{T}_{-1,f}) : y = 2\,\mathrm{e}x + \mathrm{e}$.

7. Tracer soigneusement les courbes représentatives de f et w en prenant pour échelle au moins 2 cm sur l'axe des abscisses et des ordonnées.

On prendra les approximations usuelles des physiciens $\mathrm{e} \simeq 3^{\text{« − »}}$ *et* $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \simeq \dfrac{1}{3}^{\text{« + »}}$.

Correction :



Partie B : Calcul d'une primitive W de la réciproque w.

8. Justifier que $\forall\, y \in \mathrm{J},\ w(y)\,\mathrm{e}^{-w(y)} = y$.

Correction : Il suffit de se rappeler la définition d'une réciproque :

$$\forall\, y \in \mathrm{J},\ y = f(f^{-1}(y)) \iff y = f(w(y)) = w(y)\,\mathrm{e}^{-w(y)}.$$

9. Si $y \in \mathrm{J}$, après avoir justifié son existence, calculer $\displaystyle\int_0^{w(y)} (t - t^2)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Correction : La fonction w est définie et continue sur J et à valeurs dans I, intervalle de $\mathbb{R}$ où la fonction polynomiale $t \longmapsto t - t^2$ et l'exponentielle $t \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ donc leur produit sont continus.

D'après le théorème fondamental de l'analyse, l'intégrale est correctement définie.

De plus, ces mêmes fonctions (au signe près) sont également de classe $\mathscr{C}^2$ sur tout intervalle de $\mathbb{R}$. On peut donc réaliser une double IPP en dérivant la fonction polynomiale :

$$\begin{aligned}\int_0^{w(y)} (t-t^2)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t &= \left[(t^2-t)\,\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{w(y)} + \int_0^{w(y)} (1-2t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= (w(y)^2-w(y))\,\mathrm{e}^{-w(y)} + \left[(2t-1)\,\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{w(y)} - 2\int_0^{w(y)} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= (w(y)-1)\,w(y)\,\mathrm{e}^{-w(y)} + (2w(y)-1)\,\mathrm{e}^{-w(y)} + 1 - 2\left[-\,\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{w(y)} \\ &= y(w(y)-1) + 2w(y)\,\mathrm{e}^{-w(y)} - \mathrm{e}^{-w(y)} - 1 + 2\,\mathrm{e}^{-w(y)} \\ &= yw(y) + y + \mathrm{e}^{-w(y)} - 1.\end{aligned}$$

10. Si $y \in \mathrm{J}$, calculer $\displaystyle\int_0^y w(x)\,\mathrm{d}x$ en effectuant le changement de variable $t = w(x)$.

Correction : On n'oubliera pas de rappeler que w est continue sur J donc que l'intégrale est correctement définie.

Poser $t = w(x)$ revient à poser $x = f(t)$ (car $w = f^{-1}$) qui est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

On a alors,

$$\begin{aligned}\int_0^y w(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{f(0)}^{f(w(y))} w(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{w(y)} w(f(t))\,f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{w(y)} t\,(1-t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{w(y)} (t-t^2)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= yw(y) + y + \mathrm{e}^{-w(y)} - 1.\end{aligned}$$

11. En déduire que $\mathrm{W} : y \longmapsto y\,w(y) + y + \mathrm{e}^{-w(y)}$ est une primitive de w sur J.

Correction : La fonction w étant **continue** sur J, le théorème fondamental de l'analyse assure que la fonction $y \longmapsto \displaystyle\int_0^y w(x)\,\mathrm{d}x$ est une primitive de w sur J.

La fonction $y \longmapsto yw(y) + y + \mathrm{e}^{-w(y)} - 1$ est donc une primitive de w sur J. À une constante près, la fonction W est donc aussi une primitive de w sur J.

Commentaires : *Ici, il était dangereux de dériver W (en justifiant la dérivabilité au préalable) car w n'est dérivable que sur J' et non sur J tout entier. On aurait donc obtenu facilement $\mathrm{W}' = w$ sur J', mais il reste à étudier ce qu'il se passe en $y = \frac{1}{\mathrm{e}}$, chose qu'on abordera uniquement aux chapitres sur la dérivabilité et l'intégration...*

Partie C : Résolution d'une équation différentielle d'ordre deux.

Dans cette partie, on se place sur l'intervalle J' et on s'intéresse à la résolution du problème différentiel d'inconnue z suivant :

$$\begin{cases} z'' + w(y)z' + w'(y)z = w'(y) \\ z'(0) = 0. \end{cases} \tag{E}$$

On définit alors la fonction $\mathrm{Z} \colon y \longmapsto z'(y) + w(y)z(y)$.

12. Montrer que si z est $\mathscr{C}^2$ sur J', alors Z est $\mathscr{C}^1$ sur J'.

Correction : Si z est $\mathscr{C}^2$ sur J', alors en particulier z et z' sont $\mathscr{C}^1$ sur J'. Donc, par produit et somme de fonctions $\mathscr{C}^1$ sur J' (rappelons que w est $\mathscr{C}^\infty$, donc $\mathscr{C}^1$, sur J'), on a bien Z de classe $\mathscr{C}^1$ sur J'.

13. Soit z une fonction $\mathscr{C}^2$ sur J'. Démontrer que z est solution de (E) si, et seulement si $\mathrm{Z}' = w'$ sur J'.

Correction : Par ce qui précède, Z est $\mathscr{C}^1$ sur J' et sa dérivée est

$$y \longmapsto z''(y) + w'(y)z(y) + w(y)z'(y).$$

Ainsi, une fois n'est pas coutume, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} \mathrm{Z}' = w' \text{ sur } \mathrm{J}' &\iff \forall\, y \in \mathrm{J}', \quad \mathrm{Z}'(y) = w'(y) \\ &\iff \forall\, y \in \mathrm{J}', \quad z''(y) + w(y)z'(y) + w'(y)z(y) = w'(y) \\ &\iff z \text{ est solution de (E) sur } \mathrm{J}'. \end{aligned}$$

14. En déduire que z est solution de (E) **et** $z'(0) = 0$ si, et seulement si $\forall\, y \in \mathrm{J}', \ \mathrm{Z}(y) = w(y)$.

Correction : D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned} z \text{ solution de (E) sur } \mathrm{J}' &\iff \mathrm{Z}' = w' \text{ sur } \mathrm{J}' \\ &\iff \exists\, \mathrm{K} \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathrm{J}', \quad \mathrm{Z}(y) = w(y) + \mathrm{K}. \end{aligned}$$

En prenant en compte la condition initiale $z'(0) = 0$, on a :

$$\mathrm{Z}(0) = w(0) + \mathrm{K} \iff z'(0) + w(0)z(0) = w(0) + \mathrm{K} \iff \mathrm{K} = 0,$$

car $z'(0) = w(0) = 0$.

Finalement, on a bien :

$$z \text{ solution de (E) et } z'(0) = 0 \text{ si, et seulement si } \mathrm{Z} = w \text{ sur } \mathrm{J}'.$$

15. Résoudre sur J, l'équation différentielle

$$z' + w(y)z = w(y). \tag{E'}$$

Correction : (E') est une équation différentielle linéaire du premier ordre dont l'application $y \longmapsto 1$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur J est clairement une solution particulière.

Comme w est continue sur J, les solutions homogènes sont les fonctions de la forme $y \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{W}(y)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ où W est la primitive de w sur J' calculée à la partie précédente.

Les solutions générales sur J sont donc les fonctions :

$$y \longmapsto 1 + \lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{W}(y)} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

16. Conclure quant au problème posé.

Correction : Grâce aux questions précédentes, une fois n'est pas coutume, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} z \text{ solution de (E) sur } \mathrm{J}' \text{ et } z'(0) = 0 &\iff \mathrm{Z} = w \text{ sur } \mathrm{J}' \\ &\iff z \text{ est solution sur } \mathrm{J}' \text{ de } z' + w(y)z = w(y) \\ &\iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall\, y \in \mathrm{J}', \quad z(y) = 1 + \lambda\, \mathrm{e}^{-\mathrm{W}(y)}. \end{aligned}$$

Autour d'une fonction de Lambert