De la continuité et des points fixes

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et f une application continue de $[a\,;b]$ dans lui-même.

   Montrer qu'il existe un élément c de $[a\,;b]$ tel que $f(c) = c$.

2. Soit f une application continue et décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   Montrer qu'il existe un unique réel c tel que $f(c) = c$. Ce résultat reste-t-il vrai si on suppose f croissante ?

3. (a) Montrer que toute application lipschitzienne est continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que si f est contractante *i.e.* k-lipschitzienne avec $k \in]0\,;1[$ sur $\mathbb{R}$ alors, la fonction $\phi : x \longmapsto f(x) - x$ vérifie :

   $$\lim_{x\to-\infty} \phi(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \phi(x) = +\infty.$$

   (c) Soit $k \in [0\,;1[$ et $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une application k-lipschitzienne.

   Montrer qu'il existe un unique réel c tel que $f(c) = c$.

4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et f une application croissante de $[a\,;b]$ dans lui-même.

   On pose $\mathrm{A} = \{x \in [a\,;b]\,, x \leqslant f(x)\}$.

   (a) Justifier l'existence de $c = \sup(\mathrm{A})$ et montrer que $c \in [a\,;b]$.

   (b) Montrer par l'absurde que $f(c) \leqslant c$.

   (c) Montrer par l'absurde que $f(c) \geqslant c$.

   (d) Conclure.

De la continuité et des points fixes