

De la continuité et des points fixes

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et f une application continue de $[a; b]$ dans lui-même.

Montrer qu'il existe un élément c de $[a; b]$ tel que $f(c) = c$.

Correction : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et f une application continue de $[a; b]$ dans lui-même.

Posons $\phi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto f(x) - x$$

- ϕ est **continue** sur l'intervalle $[a; b]$;
- $\phi(a) = f(a) - a \geq 0$ et $\phi(b) = f(b) - b \leq 0$.

Donc d'après le *théorème des valeurs intermédiaires*, il existe $c \in [a; b]$ tel que $\phi(c) = 0$ i.e. $f(c) = c$.

2. Soit f une application continue et décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe un unique réel c tel que $f(c) = c$. Ce résultat reste-t-il vrai si on suppose f croissante ?

Correction : Soit f une application continue et décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

La fonction f étant décroissante, d'après le théorème de convergence monotone, on peut en déduire que :

- f admet une limite $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en $-\infty$;
- f admet une limite $\mu \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ en $+\infty$.

Posons $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto f(x) - x$$

Dans tous les cas de figure, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = +\infty$.

De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = -\infty$.

Enfin, comme

- ϕ est **continue** sur l'intervalle $\mathbb{R}$;
- ϕ est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$ (somme de f décroissante et de $-Id_{\mathbb{R}}$ strictement décroissante);
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = -\infty$

D'après le *théorème de la bijection* il **existe un unique** $c \in \mathbb{R}$ tel que $\phi(c) = 0$ i.e. $f(c) = c$.

Si on suppose f croissante, le résultat ne subsiste pas nécessairement. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x + 1$ n'admet aucun point fixe tout en vérifiant les hypothèses de la question.

3. (a) Montrer que toute application lipschitzienne est continue sur $\mathbb{R}$.

Correction : Soit $k \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une application k -lipschitzienne.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Comme f est k -lipschitzienne, on a $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - f(a)| \leq k|x - a|$.

Or, $\lim_{x \rightarrow a} |x - a| = 0$ donc, par encadrement, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ i.e. f est continue en a donc sur $\mathbb{R}$.

- (b) Montrer que si f est contractante i.e. k -lipschitzienne avec $k \in]0; 1[$ sur $\mathbb{R}$ alors, la fonction $\phi : x \mapsto f(x) - x$ vérifie :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = +\infty.$$

Correction : f étant k -lipschitzienne, on a donc successivement

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(0)| &\leq k|x| \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad -k|x| &\leq f(x) - f(0) \leq k|x| \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(0) - k|x| &\leq f(x) \leq f(0) + k|x| \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(0) - k|x| - x &\leq f(x) - x \leq f(0) + k|x| - x \end{aligned}$$

On en déduit que

$$- \quad \forall x < 0, \quad f(0) + (k - 1)x \leq \phi(x).$$

Or $k - 1 < 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(0) + (k - 1)x) = +\infty$ et par comparaison

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = +\infty$$

$$- \quad \forall x > 0, \quad \phi(x) \leq f(0) + (k - 1)x.$$

Or, $k - 1 < 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(0) + (k - 1)x) = -\infty$ et par comparaison

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = -\infty$$

- (c) Soit $k \in [0; 1[$ et $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une application k -lipschitzienne.

Montrer qu'il existe un unique réel c tel que $f(c) = c$.

Correction : Reprenons les notations des questions précédentes. On a alors :

- ϕ est **continue** sur l'**intervalle** $\mathbb{R}$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = -\infty$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires généralisé il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\phi(c) = 0$ i.e. $f(c) = c$.

Montrons maintenant l'**unicité du point fixe** en supposant que a, b soient deux points fixes **distincts** de f sur $\mathbb{R}$.

Comme f est contractante, on a, en particulier,

$$|f(b) - f(a)| \leq k|b - a| \iff |b - a| \leq k|b - a| \iff_{|b-a| \neq 0} 1 \leq k.$$

Cela contredirait la définition de k , donc il ne peut exister plus d'un point fixe.

Finalement, $\exists ! c \in \mathbb{R}, f(c) = c$.

4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et f une application croissante de $[a; b]$ dans lui-même.

On pose $A = \{x \in [a; b], x \leq f(x)\}$.

(a) Justifier l'existence de $c = \sup(A)$ et montrer que $c \in [a; b]$.

Correction : Par hypothèse, on a $a \leq f(a)$. Donc $a \in A$ et A est **non vide**.

Par ailleurs, par définition A est une partie de $[a; b]$, donc A est **majoré** (par b).

D'après la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, on en déduit que A , partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure et l'on peut poser $c = \sup(A)$.

Comme $a \in A$ et c un majorant de A , on a $a \leq c$.

De plus, b est un majorant de A et c le plus petit majorant de A , d'où $c \leq b$.

Tout cela pour dire que $c \in [a; b]$.

(b) Montrer par l'absurde que $f(c) \leq c$.

Correction : Supposons que $c < f(c)$ et posons $x = f(c)$.

Par définition de l'ensemble d'arrivée de f , il est déjà clair que $x \in [a; b]$.

Par hypothèse, $c < x$. Or, c est un majorant de A , donc $x \notin A$ i.e. $f(x) < x$.

Par ailleurs, f est croissante, donc $c < x \implies f(c) \leq f(x)$.

Conséquence, $f(c) \leq f(x) < x$ qui est contradictoire car $x = f(c)$.

Donc, $f(c) \leq c$.

(c) Montrer par l'absurde que $f(c) \geq c$.

Correction : Supposons que $f(c) < c$.

Alors, $f(c)$ n'est plus un majorant de A . Il existe donc $x \in A$ tel que $f(c) < x \leq c$.

Comme $x \in A$, on a également $f(x) \geq x$.

On aurait alors $f(c) < x \leq f(x)$.

Or, $x \leq c$ entraîne, par croissance de f , $f(x) \leq f(c)$ ce qui est contradictoire.

Donc, $f(c) \geq c$.

(d) Conclure.

Correction : Par antisymétrie chère à certains, $f(c) = c$ i.e. c est un point fixe de f .

$$\exists c \in [a; b], f(c) = c.$$

Commentaires : *On a perdu l'unicité.*