Fonctions de la variable réelle – CONTINUITÉ

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 16

Sommaire I

1. Continuité
2. Théorèmes de continuité globale
3. Continuité des fonctions monotones
4. Fonctions à valeurs complexes

Longtemps, les mathématiques se sont développées au service des autres sciences. La séparation des différentes sciences est d'ailleurs tardive, et nombreux ont été les mathématiciens à avoir également été des physiciens de renommée, comme Newton par exemple. Les mathématiques ont d'abord été vues comme un outil :

- au service de la mécanique et de l'ingéniérie (Archimède)
- au service de l'astronomie (géométrie grecque, Ptolémée, écoles indienne et arabe)
- au service de toute étude nécessitant d'être chiffrée pour obtenir des ordres de grandeurs.

Du dernier point découle l'importance du développement du calcul numérique (calcul approché, en opposition au calcul algébrique). C'est ce point de vue qui est à la base des procédés d'approximation (méthode de Newton de recherche d'un zéro, méthodes approchées de calcul d'intégrales), aboutissant notamment à la notion de convergence (qui donne la validité de l'approximation à l'infini).

Ainsi, l'utilisation de l'outil est souvent à la base de sa définition, et a souvent précédé sa théorisation : les mathématiques ont évolué de façon empirique.

Dans ce chapitre nous suivons le processus inverse et donnons les outils permettant une étude efficace des fonctions. On commencera par redéfinir de manière uniforme et cohérente la notion de continuité basée sur la notion de limite revue également dans le chapitre précédent.

Dotre progression nous ramènera également sur un théorème fondamental de l'analyse réelle, le fameux théorème des valeurs intermédiaires que vous connaissez déjà bien mais dont la démonstration vous échappait encore fondamentalement.

Les fonctions que l'on étudie en analyse sont généralement définies sur des intervalles ou des réunions d'intervalles comme $\mathbb{R}^*$ ou $[0\,;1[\,\cup\,[2\,;3]$, voire $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Dans tout ce chapitre, la lettre D qui nous servira d'ensemble de définition désignera cependant, sauf mention contraire, une partie quelconque de $\mathbb{R}$.

On notera, par ailleurs, $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Continuité

1. **Continuité**
   - Fonction continue
   - Stabilité algébrique
   - Prolongement par continuité
   - Continuité et suites
2. **Théorèmes de continuité globale**
3. **Continuité des fonctions monotones**
4. **Fonctions à valeurs complexes**

Définition 1 (Fonction continue) :

Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{D}$.

- On dit que f est continue a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Définition 1 (Fonction continue) :

Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{D}$.

- On dit que f est continue a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est continue sur D si elle est continue en tout point de D.
  On note $\mathcal{C}^0(\mathrm{D}\,;\mathbb{R})$ leur ensemble.

Définition 1 (Fonction continue) :

Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{D}$.

- On dit que f est continue a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est continue sur D si elle est continue en tout point de D. On note $\mathcal{C}^0(\mathrm{D}\,;\mathbb{R})$ leur ensemble.
- On dit que f est continue à gauche en a si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$.

Définition 1 (Fonction continue) :

Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{D}$.

- On dit que f est continue a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est continue sur D si elle est continue en tout point de D.
  On note $\mathcal{C}^0(\mathrm{D}\,;\mathbb{R})$ leur ensemble.
- On dit que f est continue à gauche en a si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est continue à droite en a si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$.

I. Continuité
1. Fonction continue

f est continue en a si, et seulement si

- $\forall\, \mathrm{V}_{f(a)} \in \mathcal{V}(f(a)),\ \exists\, \mathrm{V}_{a,\mathrm{V}_{f(a)}} \in \mathcal{V}(a) \,/\, f\Big(\mathrm{V}_{a,\mathrm{V}_{f(a)}} \cap \mathrm{D}\Big) \subset \mathrm{V}_{f(a)}$.

f est continue en a si, et seulement si

- $\forall\, V_{f(a)} \in \mathcal{V}(f(a))$, $\exists\, V_{a,V_{f(a)}} \in \mathcal{V}(a) \,/\, f\Big(V_{a,V_{f(a)}} \cap D\Big) \subset V_{f(a)}$.
  ou
- $\forall\, V_{f(a)} \in \mathcal{V}(f(a))$, $\exists\, V_{a,V_{f(a)}} \in \mathcal{V}(a) \,/\, \forall\, x \in D,\ x \in V_{a,V_{f(a)}} \implies f(x) \in V_{f(a)}$.

f est continue en a si, et seulement si

- $\forall\, \mathrm{V}_{f(a)} \in \mathcal{V}(f(a)),\ \exists\, \mathrm{V}_{a,\mathrm{V}_{f(a)}} \in \mathcal{V}(a) \,/\, f\Big(\mathrm{V}_{a,\mathrm{V}_{f(a)}} \cap \mathrm{D}\Big) \subset \mathrm{V}_{f(a)}$.
  ou
- $\forall\, \mathrm{V}_{f(a)} \in \mathcal{V}(f(a)),\ \exists\, \mathrm{V}_{a,\mathrm{V}_{f(a)}} \in \mathcal{V}(a) \,/\, \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \in \mathrm{V}_{a,\mathrm{V}_{f(a)}} \implies f(x) \in \mathrm{V}_{f(a)}$.
  ce qui revient à écrire :
- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* \,/\, \forall\, x \in \mathrm{D},\ |x-a| < \alpha \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

f est continue en a si, et seulement si

- $\forall\, \mathrm{V}_{f(a)} \in \mathcal{V}(f(a)),\ \exists\, \mathrm{V}_{a,\mathrm{V}_{f(a)}} \in \mathcal{V}(a) \,/\, f\Big(\mathrm{V}_{a,\mathrm{V}_{f(a)}} \cap \mathrm{D}\Big) \subset \mathrm{V}_{f(a)}.$
  ou
- $\forall\, \mathrm{V}_{f(a)} \in \mathcal{V}(f(a)),\ \exists\, \mathrm{V}_{a,\mathrm{V}_{f(a)}} \in \mathcal{V}(a) \,/\, \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \in \mathrm{V}_{a,\mathrm{V}_{f(a)}} \implies f(x) \in \mathrm{V}_{f(a)}.$
  ce qui revient à écrire :
- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* \,/\, \forall\, x \in \mathrm{D},\ |x-a| < \alpha \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$
  ou encore :
- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* \,/\, \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \in \,]a-\alpha\,;a+\alpha[\implies f(x) \in \,]f(a)-\varepsilon\,;f(a)+\varepsilon[\,.$

f est continue en a si, et seulement si

- $\forall\, \mathrm{V}_{f(a)} \in \mathcal{V}(f(a)),\ \exists\, \mathrm{V}_{a,\mathrm{V}_{f(a)}} \in \mathcal{V}(a) \,/\, f\Big(\mathrm{V}_{a,\mathrm{V}_{f(a)}} \cap \mathrm{D}\Big) \subset \mathrm{V}_{f(a)}$.

  ou
- $\forall\, \mathrm{V}_{f(a)} \in \mathcal{V}(f(a)),\ \exists\, \mathrm{V}_{a,\mathrm{V}_{f(a)}} \in \mathcal{V}(a) \,/\, \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \in \mathrm{V}_{a,\mathrm{V}_{f(a)}} \implies f(x) \in \mathrm{V}_{f(a)}$.

  ce qui revient à écrire :
- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* \,/\, \forall\, x \in \mathrm{D},\ |x-a| < \alpha \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

  ou encore :
- $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^* \,/\, \forall\, x \in \mathrm{D},\ x \in \,]a-\alpha\,; a+\alpha[\ \implies f(x) \in \,]f(a)-\varepsilon\,; f(a)+\varepsilon[$.

Interprétation graphique : Une fonction f est continue sur un intervalle I si elle est définie sur cet intervalle et si sa courbe représentative se trace d'un « trait continu », sans lever le crayon.

ATTENTION

Pour pouvoir parler de continuité en a, il est nécessaire que f soit définie en a. Cela revient en fait à exiger seulement que la limite $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.

Cela n'a donc pas de sens de chercher si la fonction inverse est continue en 0. S'il faut lever le crayon pour tracer la courbe de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^*$, c'est simplement parce qu'elle n'est pas définie en 0.

Remarques :

- La continuité d'une fonction est une propriété locale. Cela aura de grandes conséquences.

Remarques :

- La continuité d'une fonction est une propriété locale. Cela aura de grandes conséquences.
- Une fonction continue en a y est bornée dans un voisinage de a.

Remarques :

- La continuité d'une fonction est une propriété locale. Cela aura de grandes conséquences.
- Une fonction continue en a y est bornée dans un voisinage de a.
- f n'est pas continue en a si, et seulement si

$$\exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+^* \,/\, \exists\, x_0(\alpha, \varepsilon) \in \mathrm{D},\ |x_0 - a| \leqslant \alpha \text{ et } |f(x_0) - f(a)| > \varepsilon. \tag{1}$$

Remarques :

- La continuité d'une fonction est une propriété locale. Cela aura de grandes conséquences.
- Une fonction continue en a y est bornée dans un voisinage de a.
- f n'est pas continue en a si, et seulement si

$$\exists\,\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall\,\alpha \in \mathbb{R}_+^* \,/\, \exists\,x_0(\alpha,\,\varepsilon) \in \mathrm{D},\ |x_0 - a| \leqslant \alpha \text{ et } |f(x_0) - f(a)| > \varepsilon. \quad (1)$$

- f est continue à gauche en a si $f_{|\mathrm{D}\cap]-\infty;a[}$ est continue en a et continue à droite si $f_{|\mathrm{D}\cap]a;+\infty[}$ est continue en a.

Remarques :

- La continuité d'une fonction est une propriété locale. Cela aura de grandes conséquences.
- Une fonction continue en a y est bornée dans un voisinage de a.
- f n'est pas continue en a si, et seulement si

$$\exists\,\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall\,\alpha \in \mathbb{R}_+^* \,/\, \exists\,x_0(\alpha,\,\varepsilon) \in \mathrm{D},\ |x_0 - a| \leqslant \alpha \text{ et } |f(x_0) - f(a)| > \varepsilon. \qquad (1)$$

- f est continue à gauche en a si $f_{|\mathrm{D}\cap]-\infty;a[}$ est continue en a et continue à droite si $f_{|\mathrm{D}\cap]a;+\infty[}$ est continue en a.

Remarques :

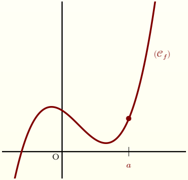
- La continuité d'une fonction est une propriété locale. Cela aura de grandes conséquences.
- Une fonction continue en a y est bornée dans un voisinage de a.
- f n'est pas continue en a si, et seulement si

$$\exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+^* \,/\, \exists\, x_0(\alpha, \varepsilon) \in \mathrm{D},\ |x_0 - a| \leqslant \alpha \text{ et } |f(x_0) - f(a)| > \varepsilon. \quad (1)$$

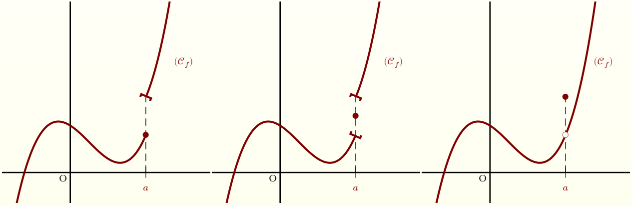
- f est continue à gauche en a si $f_{|\mathrm{D} \cap]-\infty; a[}$ est continue en a et continue à droite si $f_{|\mathrm{D} \cap]a; +\infty[}$ est continue en a.

Exemple 1 :

La fonction valeur absolue $x \longmapsto |\cdot|$ est continue sur $\mathbb{R}$.



f est continue en a.



f n'est pas continue en a.

Figure 1 – Continuité et discontinuité en un point.

Exemples 2 :

- Toute fonction constante sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exemples 2 :

- Toute fonction constante sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\mathrm{I}d_{\mathbb{R}} : x \longmapsto x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exemples 2 :

- Toute fonction constante sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\mathrm{I}d_{\mathbb{R}} : x \longmapsto x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Exemples 2 :

- Toute fonction constante sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\mathrm{I}d_{\mathbb{R}} : x \longmapsto x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Exemples 2 :

- Toute fonction constante sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\mathrm{I}d_{\mathbb{R}} : x \longmapsto x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction $x \longmapsto \lfloor \cdot \rfloor$ est définie sur $\mathbb{R}$ mais discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$.
  Plus précisément, la fonction $x \longmapsto \lfloor \cdot \rfloor$ est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$ mais n'est continue à gauche qu'en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

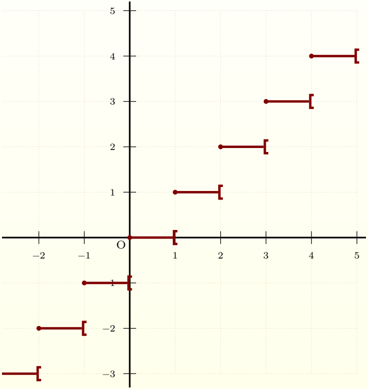


Figure 2 – $x \longmapsto \lfloor \cdot \rfloor$

Théorème 1 (Continuité à gauche et à droite) :

Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction et $a \in \mathrm{D}$ un point au voisinage duquel f est définie à gauche et à droite.

f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite en a.

Théorème I (Continuité à gauche et à droite) :

Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction et $a \in \mathrm{D}$ un point au voisinage duquel f est définie à gauche et à droite.

f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite en a.

ATTENTION

Pour tout $x \in [0\,;1[$, $\lfloor x \rfloor = 0$ et la fonction $x \longmapsto 0$ est continue sur $[0\,;1[$, mais peut-on pour autant dire que la fonction $x \longmapsto \lfloor \cdot \rfloor$ est continue sur $[0\,;1[$?

Non ! Ces deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier et coïncident sur $[0\,;1[$, mais leur continuité en 0 dépend aussi de leur comportement au voisinage de 0 À GAUCHE *i.e.* à l'extérieur de $[0\,;1[$.

Alors que la restriction $x \longmapsto \lfloor \cdot \rfloor_{|[0;1[}$ est bien continue sur $[0\,;1[$ tout entier, la fonction $x \longmapsto \lfloor \cdot \rfloor$ ne l'est que sur $]0\,;1[$. En particulier, elle N'est PAS continue en 0.

Exercice 1 :

Tracer le graphe de $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} ax+b & \text{si } x<0 \\ \sqrt{1+x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases} \end{array}$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue en 0.

Proposition 2 (Structure de l'ensemble des fonctions continues) :

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un ensemble D.

1. $|f|$ est continue sur D.

Proposition 2 (Structure de l'ensemble des fonctions continues) :

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un ensemble D.

1. $|f|$ est continue sur D.
2. Toute combinaison linéaire $\lambda f + g$ de fonctions continues sur D est continue sur D.

Proposition 2 (Structure de l'ensemble des fonctions continues) :

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un ensemble D.

1. $|f|$ est continue sur D.
2. Toute combinaison linéaire $\lambda f + g$ de fonctions continues sur D est continue sur D.
3. Le produit $f \times g$ de deux fonctions continues sur D est continue sur D.

Proposition 2 (Structure de l'ensemble des fonctions continues) :

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un ensemble D.

1. $|f|$ est continue sur D.
2. Toute combinaison linéaire $\lambda f + g$ de fonctions continues sur D est continue sur D.
3. Le produit $f \times g$ de deux fonctions continues sur D est continue sur D.
4. Si g ne s'annule pas sur D alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue sur D.

Proposition 2 (Structure de l'ensemble des fonctions continues) :

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un ensemble D.

1. $|f|$ est continue sur D.
2. Toute combinaison linéaire $\lambda f + g$ de fonctions continues sur D est continue sur D.
3. Le produit $f \times g$ de deux fonctions continues sur D est continue sur D.
4. Si g ne s'annule pas sur D alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue sur D.
5. Si $f(\mathrm{D}) \subset \mathrm{E}$ et si g est continue sur E alors $g \circ f$ est continue sur D.

Remarques :

- On dit que $\mathcal{C}^0\left(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}\right)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre pour les opérations usuelles *i.e.* que $\mathcal{C}^0\left(\mathrm{I}\,;\mathbb{R}\right)$ est stable par combinaisons linéaires et produits.

Remarques :

- On dit que $\mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre pour les opérations usuelles *i.e.* que $\mathcal{C}^0(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$ est stable par combinaisons linéaires et produits.
- Si f et g sont continues sur I alors $\sup(f\,;g)$ et $\inf(f\,;g)$ le sont aussi.
  Il suffit de remarquer que :
  $$\sup(f\,;g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \quad \text{et} \quad \inf(f\,;g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}.$$
  En particulier $f^+ = \sup(f\,;0)$ et $f^- = \inf(f\,;0)$ le sont.

Méthode 1 :

Avant de s'intéresser, si nécessaire, à des points locaux du domaine de définition D d'une fonction f, il suffira bien souvent de préciser la continuité de quelques fonctions usuelles sur un sous-ensemble D' de D et d'invoquer les « théorèmes généraux » pour conclure à la continuité de f sur D'.

On étudiera alors la continuité et l'éventualité d'un prolongement en les points de $D \setminus D'$.

Méthode 1 :

Avant de s'intéresser, si nécessaire, à des points locaux du domaine de définition D d'une fonction f, il suffira bien souvent de préciser la continuité de quelques fonctions usuelles sur un sous-ensemble D' de D et d'invoquer les « théorèmes généraux » pour conclure à la continuité de f sur D'.

On étudiera alors la continuité et l'éventualité d'un prolongement en les points de $\mathrm{D} \setminus \mathrm{D}'$.

ATTENTION

On prendra bien garde à préciser que les dénominateur des quotients ne s'annulent pas, que les expressions sous les racines sont positives, que celles dans les logarithmes strictement positives, celles dans les arcsin et arccos entre -1 et 1, ... et on précisera bien les domaines manipulés dans les composées.

Exemple 3 :

La fonction $x \longmapsto \left(\ln\left(x^2 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)\right)^2$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

En effet,

- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$) et la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ l'est sur $\mathbb{R}$, donc par composition $x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Exemple 3 :

La fonction $x \longmapsto \left(\ln\left(x^2 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)\right)^2$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

En effet,

- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$) et la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ l'est sur $\mathbb{R}$, donc par composition $x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}^*$. Par somme, $x \longmapsto x^2 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Exemple 3 :

La fonction $x \longmapsto \left(\ln\left(x^2 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)\right)^2$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

En effet,

- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$) et la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ l'est sur $\mathbb{R}$, donc par composition $x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}^*$. Par somme, $x \longmapsto x^2 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction $x \longmapsto x^2 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $x \longmapsto \ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition $x \longmapsto \ln\left(x^2 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$).

Exemple 3 :

La fonction $x \longmapsto \left(\ln\left(x^2 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)\right)^2$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

En effet,

- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$) et la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ l'est sur $\mathbb{R}$, donc par composition $x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}^*$. Par somme, $x \longmapsto x^2 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction $x \longmapsto x^2 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $x \longmapsto \ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition $x \longmapsto \ln\left(x^2 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$).
- Enfin, la fonction $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$. Le résultat découle donc d'une dernière composition.

Exercice 2 :

Montrer que la fonction $x \longmapsto \arcsin\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exemple 4 (Fonction k-lipschitzienne) :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est k-lipschitzienne de rapport $k > 0$ si pour tout $(x\,;y) \in \mathrm{I}^2$:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|\,.$$

Exemple 4 (Fonction k-lipschitzienne) :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est k-lipschitzienne de rapport $k > 0$ si pour tout $(x\,;y) \in \mathrm{I}^2$:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|\,.$$

La fonction est dite contractante si $k < 1$.

Exemple 4 (Fonction k-lipschitzienne) :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est k-lipschitzienne de rapport $k > 0$ si pour tout $(x\,;y) \in \mathrm{I}^2$:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|\,.$$

La fonction est dite contractante si $k < 1$.

Théorème 3 :

Toute fonction lipschitzienne est continue sur son ensemble de définition.

Exercice 3 :

Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Exercice 3 :

Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases} \end{array}$$

2. $$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ \dfrac{1}{4} & \text{si} \quad x = 2. \end{cases} \end{array}$$

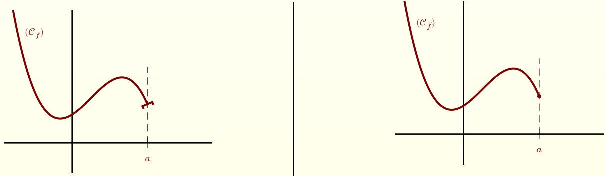
Définition 2 :

Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur D et $a \in \mathbb{R} \setminus \mathrm{D}$ adhérent à D.

On dit que f est prolongeable par continuité en a s'il existe une fonction $\tilde{f} : \mathrm{D} \cup \{a\} \longmapsto \mathbb{R}$ continue en a telle que :

$$\tilde{f}_{|\mathrm{D}} = f.$$

La fonction $\tilde{f}$ est appelée prolongement par continuité de f en a.



f n'est pas définie en a.

$\tilde{f}$ est définie, continue en a et prolonge f en a.

Figure 3 – Prolongement d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition.

ATTENTION

Dans la définition, il doit être clair que a n'appartient pas à D *i.e.* f n'est pas définie en a.

Les fonctions f et $\tilde{f}$ sont distinctes en toute rigueur car elles n'ont pas le même ensemble de définition, mais on choisit généralement de noter encore f le prolongement $\tilde{f}$ par souci de simplicité sans autre forme de procès.

Théorème 4 :

Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur D et $a \in \mathbb{R} \setminus \mathrm{D}$ adhérent à D.

f est prolongeable par continuité en a si, et seulement si f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en a.

Dans ce cas, l'unique prolongement par continuité de f en a est donné par :

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} \mathrm{D} \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in \mathrm{D} \\ \ell & \text{si} \quad x = a. \end{cases} \end{array}$$

Exemples 5 :

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \ln x$ admet un prolongement par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Exemples 5 :

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\ln x$ admet un prolongement par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
- Les fonction f et g définies sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ et $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ admettent un prolongement par continuité en 0 en posant $f(0) = g(0) = 1$.

Exemples 5 :

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \ln x$ admet un prolongement par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
- Les fonction f et g définies sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ et $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ admettent un prolongement par continuité en 0 en posant $f(0) = g(0) = 1$.
- Pour tout $\alpha > 0$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$ admet un prolongement par continuité en 0 en posant $0^\alpha = 0$.

Exercice 4 :

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

1. Montrer que f peut se prolonger en une fonction continue en 0.

Exercice 4 :

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

1. Montrer que f peut se prolonger en une fonction continue en 0.
2. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x) + 1$.
   En déduire que f peut se prolonger en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Proposition 5 (Caractérisation séquentielle de la continuité) :

Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction et $a \in \mathrm{D}$.

f est continue en a si, et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D, qui tend vers a, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$.

Proposition 5 (Caractérisation séquentielle de la continuité) :

Soient $f : \mathrm{D} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction et $a \in \mathrm{D}$.

f est continue en a si, et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D, qui tend vers a, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$.

En résumé, pour une fonction continue $\boxed{f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \dots\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(\dots).}$

En pratique, ce théorème est plus souvent utilisé dans deux contextes bien précis :

- celui des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$:

  Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ ET si f continue en ℓ alors $f(\ell) = \ell$.

En pratique, ce théorème est plus souvent utilisé dans deux contextes bien précis :

- celui des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$:

  $$\textit{Si } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ converge vers } \ell \textit{ ET si } f \textit{ continue en } \ell \textit{ alors } f(\ell) = \ell.$$

- celui des fonctions discontinues :
  Par la contraposée pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point a, il suffit de trouver deux suites qui convergent vers a mais telles que leur image converge soit pas soit vers deux limites différentes comme à l' exercice (5) .

Exercice 5 :

Étudier la continuité en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

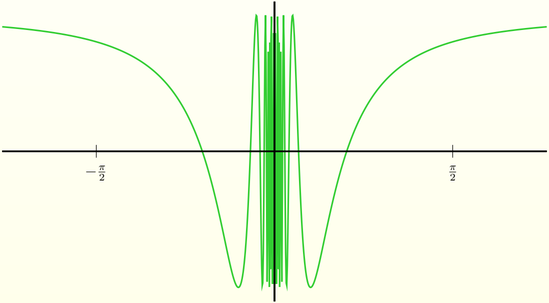


Figure 4 – $x \longmapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'est pas continue en 0.

Exemple 6 (Fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{Q}$) :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ est rationnel sous sa forme irréductible,} \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel} \end{cases}$$

est continue en tout point irrationnel et discontinue ailleurs.

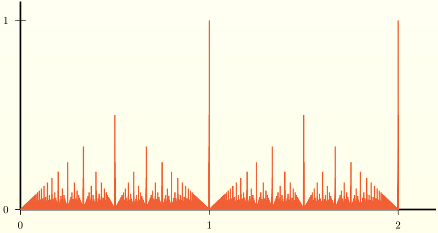


Figure 5 – Graphe de la fonction f, dite de Thomae, continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et discontinue sur $\mathbb{Q}$.

II. Théorèmes de continuité globale

1. Continuité
2. **Théorèmes de continuité globale**
   - Théorème de Bolzano et dichotomie
   - Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences
   - Image d'un segment
3. Continuité des fonctions monotones
4. Fonctions à valeurs complexes

ATTENTION

Les théorèmes de ce paragraphe ne concernent que les fonctions à valeurs réelles.

La continuité globale désigne la continuité sur un intervalle par opposition à la continuité locale en un point.

Théorème 6 (dit de Bolzano) :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors f s'annule au moins une fois sur $[a\,;b]$ *i.e.* $\exists\, c \in [a\,;b]\,,\ f(c) = 0$.

Théorème 6 (dit de Bolzano) :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$.

Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors f s'annule au moins une fois sur $[a\,;b]$ *i.e.* $\exists\, c \in [a\,;b]\,,\ f(c) = 0$.

Exercice 6 :

Montrer que l'équation $x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$ admet au moins trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

En donner un encadrement à 10^{-1} de chacune d'elles.

Théorème 6 (dit de Bolzano) :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$.

Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors f s'annule au moins une fois sur $[a\,;b]$ *i.e.* $\exists\, c \in [a\,;b]\,,\ f(c) = 0$.

Exercice 6 :

Montrer que l'équation $x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$ admet au moins trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

En donner un encadrement à 10^{-1} de chacune d'elles.

Corollaire 1 :

Tout polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine réelle.

Proposition 7 (Méthode de dichotomie) :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a\,;b]$, telle que $f(a)f(b) < 0$.

On construit deux suites récurrentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

Proposition 7 (Méthode de dichotomie) :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a\,;b]$, telle que $f(a)f(b) < 0$.

On construit deux suites récurrentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

Proposition 7 (Méthode de dichotomie) :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a\,;b]$, telle que $f(a)f(b) < 0$.

On construit deux suites récurrentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
  - si $f(a_n)f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$,

Proposition 7 (Méthode de dichotomie) :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a\,;b]$, telle que $f(a)f(b) < 0$.

On construit deux suites récurrentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
  - si $f(a_n)f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$,
  - sinon, on pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

Proposition 7 (Méthode de dichotomie) :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a\,;b]$, telle que $f(a)f(b) < 0$.

On construit deux suites récurrentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
  - si $f(a_n)f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$,
  - sinon, on pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

Les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont alors adjacentes, et elles convergent vers une limite commune α vérifiant $f(\alpha) = 0$.

II. Théorèmes de continuité globale

1. Théorème de Bolzano et dichotomie

Proposition 7 (Méthode de dichotomie) :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a\,;b]$, telle que $f(a)f(b) < 0$.

On construit deux suites récurrentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
  - si $f(a_n)f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$,
  - sinon, on pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

Les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont alors adjacentes, et elles convergent vers une limite commune α vérifiant $f(\alpha) = 0$.

De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$, ce qui majore l'erreur commise en approchant α par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 7 (Méthode de dichotomie) :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a\,;b]$, telle que $f(a)f(b) < 0$.

On construit deux suites récurrentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
  - si $f(a_n)f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$,
  - sinon, on pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

Les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont alors adjacentes, et elles convergent vers une limite commune α vérifiant $f(\alpha) = 0$.

De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$, ce qui majore l'erreur commise en approchant α par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La proposition (7) peut être vue comme une démonstration séquentielle du théorème (6).

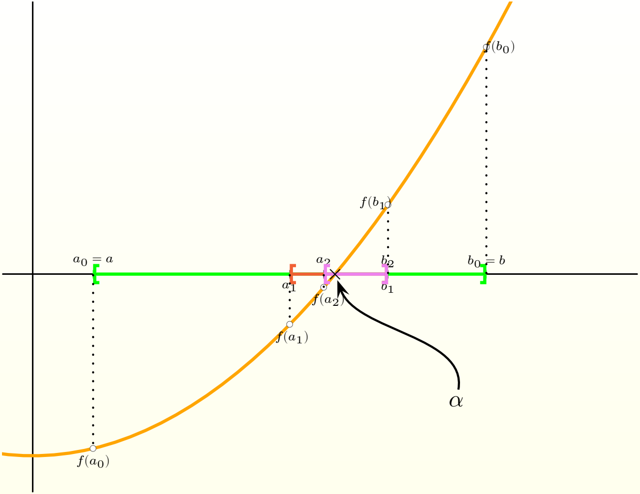


Figure 6 – Méthode par dichotomie

Remarque : a_n est une valeur approchée de α par défaut à $\dfrac{b-a}{2^n}$ près, b_n est une valeur approchée par excès.

```python
def dichotomie (f,a,b,epsilon): # f continue et f(a)*f (t) <=0
                                # avec a<b
        while b-a >= epsilon:
                milieu = (a+b)/2
                if f(a)*f(milieu) <= 0: # f s'annule dans la
                                        # première moitié
                        b = milieu
                else :
                        a = milieu      # f s'annule dans la
                                        # deuxième moitié
        return (a+b)/2.
```

Figure 7 – Dichotomie en *Python*

Exemple 7 :

On cherche à étudier les variations de la fonction f définie par

$$f(x) = x^4 + 4x^2 + 4x - 5.$$

Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 4(x^3 + 2x + 1)$.

Il est donc nécessaire de connaître le signe de $g(x) = x^3 + 2x + 1$ donc de connaître ces racines.

La fonction g, étant continue et strictement croissante, elle établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

En particulier, elle s'annule en un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}$.

On aimerait déterminer une valeur approchée de α. Ayons pour cela recours à la dichotomie.

Exemple 7 :

$$f(x) = x^4 + 4x^2 + 4x - 5 \quad \text{et} \quad g(x) = x^3 + 2x + 1.$$

- On commence par trouver un premier encadrement de α en constatant que $g(0) = 1$ et $g(-1) = -2$.
  La racine de g se trouve donc dans l'intervalle $[-1\,;0]$.

Exemple 7 :

$$f(x) = x^4 + 4x^2 + 4x - 5 \quad \text{et} \quad g(x) = x^3 + 2x + 1.$$

- On commence par trouver un premier encadrement de α en constatant que $g(0) = 1$ et $g(-1) = -2$.

  La racine de g se trouve donc dans l'intervalle $[-1\,;0]$.
- On calcule ensuite $g(-0,5)$ qui se trouve être négatif, donc $\alpha \in [-0,5\,;0]$.

Exemple 7 :

$$f(x) = x^4 + 4x^2 + 4x - 5 \quad \text{et} \quad g(x) = x^3 + 2x + 1.$$

- On commence par trouver un premier encadrement de α en constatant que $g(0) = 1$ et $g(-1) = -2$.

  La racine de g se trouve donc dans l'intervalle $[-1\,;0]$.
- On calcule ensuite $g(-0,5)$ qui se trouve être négatif, donc $\alpha \in [-0,5\,;0]$.
- Puis on calcule $g(-0,25)$, qui est positif, donc $\alpha \in [-0,5\,;-0,25]$.

Exemple 7 :

$$f(x) = x^4 + 4x^2 + 4x - 5 \quad \text{et} \quad g(x) = x^3 + 2x + 1.$$

- On commence par trouver un premier encadrement de α en constatant que $g(0) = 1$ et $g(-1) = -2$.
  La racine de g se trouve donc dans l'intervalle $[-1\,;0]$.
- On calcule ensuite $g(-0,5)$ qui se trouve être négatif, donc $\alpha \in [-0,5\,;0]$.
- Puis on calcule $g(-0,25)$, qui est positif, donc $\alpha \in [-0,5\,;-0,25]$.

On sait donc déjà que $\alpha \simeq -0,375$ à $0,125$ près.

Exemple 7 :

$$f(x) = x^4 + 4x^2 + 4x - 5 \quad \text{et} \quad g(x) = x^3 + 2x + 1.$$

- On commence par trouver un premier encadrement de α en constatant que $g(0) = 1$ et $g(-1) = -2$.
  La racine de g se trouve donc dans l'intervalle $[-1\,;0]$.
- On calcule ensuite $g(-0,5)$ qui se trouve être négatif, donc $\alpha \in [-0,5\,;0]$.
- Puis on calcule $g(-0,25)$, qui est positif, donc $\alpha \in [-0,5\,;-0,25]$.

On sait donc déjà que $\alpha \simeq -0,375$ à $0,125$ près.

Remarque : Pour obtenir une valeur approchée à $\varepsilon > 0$ près, il suffit de choisir n tel que :

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \iff \frac{\ln\left(\dfrac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2} \leqslant n$$

Théorème 8 (Théorème des valeurs intermédiaires) :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Plus précisément, soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$ et $f \in \mathcal{C}^0([a\,;b]\,;\mathbb{R})$.

Tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ possède un antécédent par f dans $[a\,;b]$.

« Pour tout réel k entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = k$. »

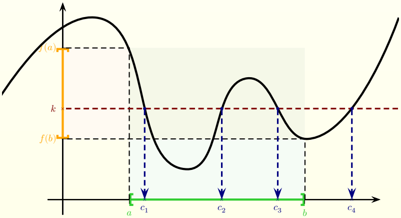


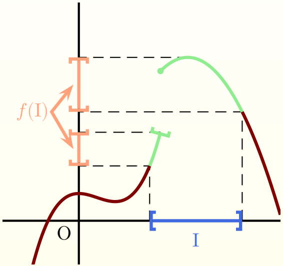
Figure 8 – Une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ prend toutes les valeurs de celui-ci.

ATTENTION

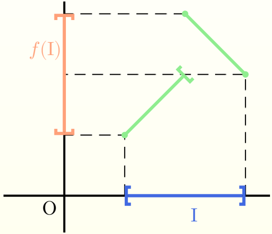
Si I est un INTERVALLE et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, cette version nouvelle du TVI affirme que $f(\mathrm{I})$ est également un INTERVALLE, mais pas que I et $f(\mathrm{I})$ sont de même nature.

Il se peut que I soit ouvert et $f(\mathrm{I})$ un segment, ou bien que I soit semi-ouvert et $f(\mathrm{I})$ ouvert, ...

Comme le montrera le théorème (9), ce sera, par contre, bien le cas lorsque l'intervalle est un segment *i.e.* un intervalle de la forme $[a\,;b]$.



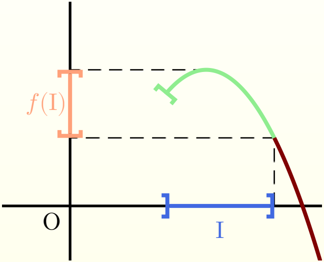
I est un intervalle, $f(\mathrm{I})$ n'est pas un intervalle.



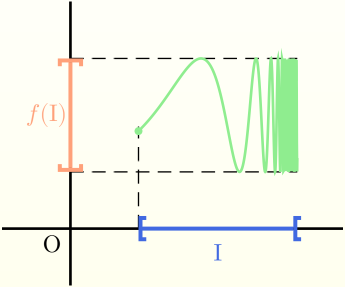
I et $f(\mathrm{I})$ sont des intervalles (des segments).

f n'est pas continue sur I.

Figure 9 – Image d'un intervalle par une fonction



I est ouvert, $f(\mathrm{I})$ est fermé.



I est semi-ouvert, $f(\mathrm{I})$ est fermé.

f est continue sur I.

Figure 9 – Image d'un intervalle par une fonction

Une réflexion : *Un contre-exemple à l'équivalence entre la propriété des valeurs intermédiaires et la continuité nous est donné par la fonction de l'exercice précédent* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Cette fonction n'est pas continue en 0 *mais elle satisfait bien la propriété des valeurs intermédiaires pour chaque couple de points dans* $\mathbb{R}$.

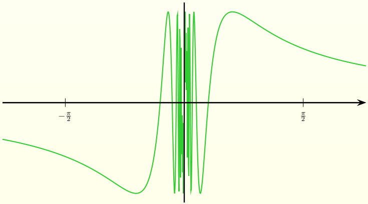


Figure 10 – $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ne peut être prolongeable par continuité en 0 mais vérifie la propriété du théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 7 :

Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

Démontrer que f a un point fixe, et un seul lorsqu'elle décroît.

Exercice 7 :

Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

Démontrer que f a un point fixe, et un seul lorsqu'elle décroît.

Exercice 8 :

Un marcheur parcourt douze kilomètres en une heure.

Démontrer qu'il existe une demi-heure pendant laquelle il parcourt exactement six kilomètres.

Rappel (Segment) :

Soient $a < b$ des réels. On appelle segment l'ensemble noté $[a\,;b]$ défini par :

$$[a\,;b] = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, a \leqslant x \leqslant b \right\}.$$

Rappel (Segment) :

Soient $a < b$ des réels. On appelle segment l'ensemble noté $[a\,;b]$ défini par :

$$[a\,;b] = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leqslant x \leqslant b\right\}.$$

En particulier, les segments de $\mathbb{R}$ sont des fermés bornés de $\mathbb{R}$.

II. Théorèmes de continuité globale

3. Image d'un segment

Rappel (Segment) :

Soient $a < b$ des réels. On appelle segment l'ensemble noté $[a\,;b]$ défini par :

$$[a\,;b] = \Big\{ x \in \mathbb{R} \,/\, a \leqslant x \leqslant b \Big\}.$$

En particulier, les segments de $\mathbb{R}$ sont des fermés bornés de $\mathbb{R}$.

Théorème (Théorème des bornes atteintes [1]) :

Toute fonction continue sur un SEGMENT y est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists\, c, d \in [a\,;b] \quad \text{tels que} \quad f(c) = \min_{x\in[a;b]} f(x) \qquad \text{et} \qquad f(d) = \max_{x\in[a;b]} f(x).$$

[1]. La démonstration de ce théorème est admise en PTSI.

Moralité : Même si nous avons vu que la continuité ne préservait pas la nature des intervalles en général, une chose est sûre, un segment est toujours transformé en un segment.

Moralité : Même si nous avons vu que la continuité ne préservait pas la nature des intervalles en général, une chose est sûre, un segment est toujours transformé en un segment.

En effet, si nous savions déjà que l'image de $[a\,;b]$ était un intervalle, nous savons désormais que les bornes sont atteintes *i.e.*

$$f(\,[a\,;b]\,) = [m\,;\mathrm{M}] \quad \text{où} \quad m = \min_{x\in[a;b]} f(x) = f(c) \quad \text{et} \quad \mathrm{M} = \max_{x\in[a;b]} f(x) = f(d).$$

ou, de manière équivalente :

Moralité : Même si nous avons vu que la continuité ne préservait pas la nature des intervalles en général, une chose est sûre, un segment est toujours transformé en un segment.

En effet, si nous savions déjà que l'image de $[a\,;b]$ était un intervalle, nous savons désormais que les bornes sont atteintes *i.e.*

$$f(\,[a\,;b]\,) = [m\,;\mathrm{M}] \quad \text{où} \quad m = \min_{x\in[a;b]} f(x) = f(c) \quad \text{et} \quad \mathrm{M} = \max_{x\in[a;b]} f(x) = f(d).$$

ou, de manière équivalente :

L'image d'un SEGMENT par une fonction CONTINUE est un SEGMENT.

II. Théorèmes de continuité globale

3. Image d'un segment

Moralité : Même si nous avons vu que la continuité ne préservait pas la nature des intervalles en général, une chose est sûre, un segment est toujours transformé en un segment.

En effet, si nous savions déjà que l'image de $[a\,;b]$ était un intervalle, nous savons désormais que les bornes sont atteintes *i.e.*

$$f(\,[a\,;b]\,) = [m\,;\mathrm{M}] \quad \text{où} \quad m = \min_{x\in[a;b]} f(x) = f(c) \quad \text{et} \quad \mathrm{M} = \max_{x\in[a;b]} f(x) = f(d).$$

ou, de manière équivalente :

> L'image d'un SEGMENT par une fonction CONTINUE est un SEGMENT.

ATTENTION

Sur un intervalle borné qui n'est pas un segment, une fonction continue n'a aucune raison d'être bornée. Pensez à la fonction tan sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exemples 8 :

Le fait que $[a\,;b]$ soit un intervalle fermé borné est très important. Voici quelques exemples :

1. $x \longmapsto x$ définie sur $[0\,;+\infty[$ n'est pas majorée.

Exemples 8 :

Le fait que $[a\,;b]$ soit un intervalle fermé borné est très important. Voici quelques exemples :

1. $x \longmapsto x$ définie sur $[0\,;+\infty[$ n'est pas majorée.
2. $x \longmapsto \dfrac{x}{x+1}$ définie sur $[0\,;+\infty[$ est majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure 1.

Exemples 8 :

Le fait que $[a\,;b]$ soit un intervalle fermé borné est très important. Voici quelques exemples :

1. $x \longmapsto x$ définie sur $[0\,;+\infty[$ n'est pas majorée.
2. $x \longmapsto \dfrac{x}{x+1}$ définie sur $[0\,;+\infty[$ est majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure 1.
3. $x \longmapsto 1-x$ définie sur $]0\,;1]$ est majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure 1.

Exemples 8 :

Le fait que $[a\,;b]$ soit un intervalle fermé borné est très important. Voici quelques exemples :

1. $x \longmapsto x$ définie sur $[0\,;+\infty[$ n'est pas majorée.
2. $x \longmapsto \dfrac{x}{x+1}$ définie sur $[0\,;+\infty[$ est majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure 1.
3. $x \longmapsto 1-x$ définie sur $]0\,;1]$ est majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure 1.
4. $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $]0\,;1]$ n'est pas majorée.

Exemples 8 :

Le fait que $[a\,;b]$ soit un intervalle fermé borné est très important. Voici quelques exemples :

1. $x \longmapsto x$ définie sur $[0\,;+\infty[$ n'est pas majorée.
2. $x \longmapsto \dfrac{x}{x+1}$ définie sur $[0\,;+\infty[$ est majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure 1.
3. $x \longmapsto 1-x$ définie sur $]0\,;1]$ est majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure 1.
4. $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $]0\,;1]$ n'est pas majorée.

Exercice 9 :

Montrer qu'une fonction continue et strictement positive sur un segment y est minorée par un réel strictement positif.

Corollaire 2 :

Toute fonction continue périodique définie sur $\mathbb{R}$ tout entier est bornée.

III. Continuité des fonctions monotones

1 Continuité

2 Théorèmes de continuité globale

3 **Continuité des fonctions monotones**

- Lien entre monotonie et continuité
- Continuité et bijectivité

4 Fonctions à valeurs complexes

Tout d'abord une conséquence direct du théorème (9) et de celui de la limite monotone.

Théorème 10 (TVI appliqué aux fonctions strictement monotones) :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Toute fonction continue et strictement croissante sur I est bijective de I sur $f(\mathrm{I})$ *i.e.* quels que soient $a < b$ deux réels de I, tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet un unique antécédent par f dans $[a\,;b]$.

Théorème 10 (TVI appliqué aux fonctions strictement monotones) :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Toute fonction continue et strictement croissante sur I est bijective de I sur $f(\mathrm{I})$ *i.e.* quels que soient $a < b$ deux réels de I, tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet un unique antécédent par f dans $[a\,;b]$.

De plus, $f(\mathrm{I})$ est un intervalle et, pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, suivant le sens de monotonie de f,

- si $\mathrm{I} = [a\,;b]$ alors $f(\mathrm{I}) = [f(a)\,;f(b)]$ ou $f(\mathrm{I}) = [f(b)\,;f(a)]$,

Théorème 10 (TVI appliqué aux fonctions strictement monotones) :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Toute fonction continue et strictement croissante sur I est bijective de I sur $f(\mathrm{I})$ *i.e.* quels que soient $a < b$ deux réels de I, tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet un unique antécédent par f dans $[a\,;b]$.

De plus, $f(\mathrm{I})$ est un intervalle et, pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, suivant le sens de monotonie de f,

- si $\mathrm{I} = [a\,;b]$ alors $f(\mathrm{I}) = [f(a)\,;f(b)]$ ou $f(\mathrm{I}) = [f(b)\,;f(a)]$,
- si $\mathrm{I} = [a\,;b[$ alors $f(\mathrm{I}) = \left[f(a)\,;\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$ ou $f(\mathrm{I}) = \left[\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,;f(a)\right[$,

Théorème 10 (TVI appliqué aux fonctions strictement monotones) :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Toute fonction continue et strictement croissante sur I est bijective de I sur $f(\mathrm{I})$ *i.e.* quels que soient $a < b$ deux réels de I, tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet un unique antécédent par f dans $[a\,;b]$.

De plus, $f(\mathrm{I})$ est un intervalle et, pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, suivant le sens de monotonie de f,

- si $\mathrm{I} = [a\,;b]$ alors $f(\mathrm{I}) = [f(a)\,;f(b)]$ ou $f(\mathrm{I}) = [f(b)\,;f(a)]$,
- si $\mathrm{I} = [a\,;b[$ alors $f(\mathrm{I}) = \left[f(a)\,;\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$ ou $f(\mathrm{I}) = \left[\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,;f(a)\right[$,
- si $\mathrm{I} =]a\,;b]$ alors $f(\mathrm{I}) = \left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,;f(b)\right]$ ou $f(\mathrm{I}) = \left]f(b)\,;\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right]$,

III. Continuité des fonctions monotones

1. Lien entre monotonie et continuité

Théorème 10 (TVI appliqué aux fonctions strictement monotones) :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Toute fonction continue et strictement croissante sur I est bijective de I sur $f(\mathrm{I})$ *i.e.* quels que soient $a < b$ deux réels de I, tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet un unique antécédent par f dans $[a\,;b]$.

De plus, $f(\mathrm{I})$ est un intervalle et, pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, suivant le sens de monotonie de f,

- si $\mathrm{I} = [a\,;b]$ alors $f(\mathrm{I}) = [f(a)\,;f(b)]$ ou $f(\mathrm{I}) = [f(b)\,;f(a)]$,
- si $\mathrm{I} = [a\,;b[$ alors $f(\mathrm{I}) = \left[f(a)\,;\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$ ou $f(\mathrm{I}) = \left[\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,;f(a)\right[$,
- si $\mathrm{I} =]a\,;b]$ alors $f(\mathrm{I}) = \left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,;f(b)\right]$ ou $f(\mathrm{I}) = \left]f(b)\,;\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right]$,
- si $\mathrm{I} =]a\,;b[$ alors $f(\mathrm{I}) = \left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,;\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\right[$ ou $f(\mathrm{I}) = \left]\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\,;\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right[$ respectivement.

En particulier, l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone est un intervalle de même nature.

ATTENTION

Lorsque la monotonie n'est pas stricte, il se peut que les limites aux bornes exclues soit tout de même atteintes.

ATTENTION

Lorsque la monotonie n'est pas stricte, il se peut que les limites aux bornes exclues soit tout de même atteintes.

Théorème 11 (Monotonie + intervalle entraîne continuité) :

Soit $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction **monotone** sur un **intervalle** I.

La fonction f est continue sur I si, et seulement si $f(\mathrm{I})$ est un intervalle.

ATTENTION

Lorsque la monotonie n'est pas stricte, il se peut que les limites aux bornes exclues soit tout de même atteintes.

Théorème 11 (Monotonie + intervalle entraîne continuité) :

Soit $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction **monotone** sur un **intervalle** I.

La fonction f est continue sur I si, et seulement si $f(\mathrm{I})$ est un intervalle.

Remarque : Ce théorème énonce une réciproque du théorème théorème (8) des valeurs intermédiaires, mais elle n'est valable que pour les fonctions monotones.

ATTENTION

Ce résultat d'apparence anodine est à employer prudemment. La continuité, même vue globalement, est une notion locale et le fait que l'ensemble-image soit un intervalle ne garantit aucunement que la fonction est continue sur son intervalle de définition.

À titre d'exemple, on pourra considérer la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

L'ensemble-image $f(\mathbb{R})$ est un intervalle puisqu'égal à $\mathbb{R}$. Pourtant, la fonction f n'est pas continue en 0, donc n'est pas continue sur son intervalle de définition.

Théorème 12 (Théorème de la bijection) :

Soient I un intervalle et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$, une fonction continue sur I.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est strictement monotone sur I.

Théorème 12 (Théorème de la bijection) :

Soient I un intervalle et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$, une fonction continue sur I.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est strictement monotone sur I.
2. f est injective sur I, donc bijective de I sur $f(\mathrm{I})$.

Théorème 12 (Théorème de la bijection) :

Soient I un intervalle et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$, une fonction continue sur I.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est strictement monotone sur I.
2. f est injective sur I, donc bijective de I sur $f(\mathrm{I})$.

Dans ces conditions, f^{-1} est continue et strictement monotone de même sens de variation que f sur $f(\mathrm{I})$.

Théorème 12 (Théorème de la bijection) :

Soient I un intervalle et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$, une fonction continue sur I.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est strictement monotone sur I.
2. f est injective sur I, donc bijective de I sur $f(\mathrm{I})$.

Dans ces conditions, f^{-1} est continue et strictement monotone de même sens de variation que f sur $f(\mathrm{I})$.

Remarque : Étant donné que les graphes de f et f^{-1} sont symétriques. Si le graphe de f peut être tracé sans lever le crayon, comment le graphe de f^{-1} ne le pourrait-il pas ?

Définition 3 (Homéomorphisme) :

On appelle homéomorphisme toute bijection continue entre deux espaces topologiques dont la bijection réciproque est continue.

Le théorème (12) affirme donc que toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I est un homéomorphisme.

Définition 3 (Homéomorphisme) :

On appelle homéomorphisme toute bijection continue entre deux espaces topologiques dont la bijection réciproque est continue.

Le théorème (12) affirme donc que toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I est un homéomorphisme.

ATTENTION

- Il existe des injections non strictement monotones.

Définition 3 (Homéomorphisme) :

On appelle homéomorphisme toute bijection continue entre deux espaces topologiques dont la bijection réciproque est continue.

Le théorème (12) affirme donc que toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I est un homéomorphisme.

ATTENTION

- Il existe des injections non strictement monotones.
- Il existe des fonctions bijectives mais non monotones. Elles ne sont alors pas continues

Définition 3 (Homéomorphisme) :

On appelle homéomorphisme toute bijection continue entre deux espaces topologiques dont la bijection réciproque est continue.

Le théorème (12) affirme donc que toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I est un homéomorphisme.

ATTENTION

- Il existe des injections non strictement monotones.
- Il existe des fonctions bijectives mais non monotones.
  Elles ne sont alors pas continues
- Il existe des fonctions bijectives et continues, dont la bijection réciproque n'est pas continue.
  On vient de voir que ce n'est jamais le cas lorsque f est monotone sur un intervalle I.

Exemple 9 :

En début d'année, l'existence des fonctions arcsin, arccos et arctan a découlé du TVI strictement monotone et leur continuité du théorème de continuité d'une réciproque.

La preuve de continuité de f^{-1} peut être adaptée à la recherche des limites aux bornes d'une réciproque.

Corollaire 3 :

Soient I intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ continue et strictement monotone.

Alors f^{-1} admet des limites aux bornes de $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$ données par :

$$\lim_{y \to \sup(\mathrm{J})} f^{-1}(y) = \begin{cases} \sup(\mathrm{I}) & \text{si } f \text{ croissante} \\ \inf(\mathrm{I}) & \text{si } f \text{ décroissante} \end{cases}$$

On a un résultat analogue pour la limite de f^{-1} en $\inf(\mathrm{J})$.

La preuve de continuité de f^{-1} peut être adaptée à la recherche des limites aux bornes d'une réciproque.

Corollaire 3 :

Soient I intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ continue et strictement monotone.

Alors f^{-1} admet des limites aux bornes de $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$ données par :

$$\lim_{y \to \sup(\mathrm{J})} f^{-1}(y) = \begin{cases} \sup(\mathrm{I}) & \text{si } f \text{ croissante} \\ \inf(\mathrm{I}) & \text{si } f \text{ décroissante} \end{cases}$$

On a un résultat analogue pour la limite de f^{-1} en $\inf(\mathrm{J})$.

On retrouve la continuité de exp, arctan, arccos, arcsin sur leur intervalle de définition respectif avec leurs limites au bornes.

Par exemple, $\arctan(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \sup\left(\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 10 :

1. Montrer que $f : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1-x^2} \end{array}$ est bijective.

Exercice 10 :

1. Montrer que $f : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1-x^2} \end{array}$ est bijective.
2. Exprimer $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

IV. Fonctions à valeurs complexes

1. Continuité
2. Théorèmes de continuité globale
3. Continuité des fonctions monotones
4. **Fonctions à valeurs complexes**

IV. Fonctions à valeurs complexes

On rappelle qu'il n'est question ici que de fonctions $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$, où $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$.

Les fonctions dont la variable est elle-même complexe sont l'objet de tout un pan de l'analyse, appelée analyse complexe, utilisant des méthodes très différentes de celles étudiées dans ce chapitre et pas du tout à votre programme.

IV. Fonctions à valeurs complexes

On rappelle qu'il n'est question ici que de fonctions $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$, où $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$.

Les fonctions dont la variable est elle-même complexe sont l'objet de tout un pan de l'analyse, appelée analyse complexe, utilisant des méthodes très différentes de celles étudiées dans ce chapitre et pas du tout à votre programme.

Rappel (Limite) :

La fonction f admet pour limite $\ell \in \mathbb{C}$ quand x tend vers $a \in \mathrm{I}$ si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \,/\, |x-a| \leqslant \alpha \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$$

IV. Fonctions à valeurs complexes

On rappelle qu'il n'est question ici que de fonctions $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$, où $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$.

Les fonctions dont la variable est elle-même complexe sont l'objet de tout un pan de l'analyse, appelée analyse complexe, utilisant des méthodes très différentes de celles étudiées dans ce chapitre et pas du tout à votre programme.

Rappel (Limite) :

La fonction f admet pour limite $\ell \in \mathbb{C}$ quand x tend vers $a \in \mathrm{I}$ si :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^* \,/\, |x-a| \leqslant \alpha \implies |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon.$$

C'est exactement la même définition que pour une fonction réelle, la seule toute petite différence étant que la valeur absolue en fin de définition s'est transformée en module.

IV. Fonctions à valeurs complexes

- Les notions de limite à gauche et à droite, ainsi que la caractérisation de la limite en termes de limite à gauche et à droite, sont maintenues pour les fonctions à valeurs complexes.

IV. Fonctions à valeurs complexes

- Les notions de limite à gauche et à droite, ainsi que la caractérisation de la limite en termes de limite à gauche et à droite, sont maintenues pour les fonctions à valeurs complexes.
- La caractérisation séquentielle de la limite est également maintenue, de même que les résultats sur les opérations d'addition, produit, multiplication par un scalaire et inverse, à ceci près que les symboles $\pm\infty$ sont bannis.
  En effet, on ne peut définir de limites infinies dans $\mathbb{C}$ de façon simple : si on calque la définition réelle, le module de f tendra vers $+\infty$ mais ça ne dit rien sur f elle-même dans la mesure où, dans $\mathbb{C}$, on peut se rapprocher de l'infini dans toutes les directions et, en particulier, parler de $+\infty$ et de $-\infty$ n'a évidemment aucun sens.

IV. Fonctions à valeurs complexes

- Les notions de limite à gauche et à droite, ainsi que la caractérisation de la limite en termes de limite à gauche et à droite, sont maintenues pour les fonctions à valeurs complexes.
- La caractérisation séquentielle de la limite est également maintenue, de même que les résultats sur les opérations d'addition, produit, multiplication par un scalaire et inverse, à ceci près que les symboles $\pm\infty$ sont bannis. En effet, on ne peut définir de limites infinies dans $\mathbb{C}$ de façon simple : si on calque la définition réelle, le module de f tendra vers $+\infty$ mais ça ne dit rien sur f elle-même dans la mesure où, dans $\mathbb{C}$, on peut se rapprocher de l'infini dans toutes les directions et, en particulier, parler de $+\infty$ et de $-\infty$ n'a évidemment aucun sens.
- Les grands théorèmes d'existence de limite – théorèmes d'encadrement, minoration, majoration et théorème de la limite monotone – n'ont pas de sens dans le cas complexe car ils utilisent de façon essentielle la relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 13 (Continuité) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

$$f \text{ est continue sur I si, et seulement si } \mathrm{Re}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ le sont.}$$

Théorème 13 (Continuité) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

$$f \text{ est continue sur I si, et seulement si } \mathrm{Re}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ le sont.}$$

Comme pour les fonctions à valeurs réelles, les combinaisons linéaires, produits, quotients (de dénominateur non nul) et composées de fonctions continues sont des fonctions continues.

IV. Fonctions à valeurs complexes

Théorème 13 (Continuité) :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes.

$$f \text{ est continue sur I si, et seulement si } \mathrm{Re}\,(f) \text{ et } \mathrm{Im}\,(f) \text{ le sont.}$$

Comme pour les fonctions à valeurs réelles, les combinaisons linéaires, produits, quotients (de dénominateur non nul) et composées de fonctions continues sont des fonctions continues.

Exemples 10 :

Les fonctions $t \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{1 + \mathrm{i}\,t}$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Compte tenu de la définition, on retrouve des propriétés analogues au cas réel, **à UNE exception près**.

À retenir :

Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

1. On retrouve les mêmes théorèmes généraux, en particulier $(\mathcal{C}^0(\mathrm{D}\,;\mathbb{R}), +, \times, \cdot)$ et $(\mathcal{C}^0(\mathrm{D}\,;\mathbb{R}), +, \circ, \cdot)$ sont des $\mathbb{C}$-algèbres, non commutative pour la seconde.

IV. Fonctions à valeurs complexes

Compte tenu de la définition, on retrouve des propriétés analogues au cas réel, **à UNE exception près**.

À retenir :

Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

1. On retrouve les mêmes théorèmes généraux, en particulier $\left(\mathcal{C}^0\left(\mathrm{D}\,;\mathbb{R}\right),+,\times,\cdot\right)$ et $\left(\mathcal{C}^0\left(\mathrm{D}\,;\mathbb{R}\right),+,\circ,\cdot\right)$ sont des $\mathbb{C}$-algèbres, non commutative pour la seconde.
2. Si f est continue sur D, alors les fonctions $\overline{f}$ et $|f|$ aussi.

Compte tenu de la définition, on retrouve des propriétés analogues au cas réel, **à UNE exception près**.

À retenir :

Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

1. On retrouve les mêmes théorèmes généraux, en particulier $\left(\mathcal{C}^0\left(\mathrm{D}\,;\mathbb{R}\right),+,\times,\cdot\right)$ et $\left(\mathcal{C}^0\left(\mathrm{D}\,;\mathbb{R}\right),+,\circ,\cdot\right)$ sont des $\mathbb{C}$-algèbres, non commutative pour la seconde.
2. Si f est continue sur D, alors les fonctions $\overline{f}$ et $|f|$ aussi.
3. Si $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{C}$ est continue sur le segment $[a\,;b]$, alors f est bornée et atteint ses bornes *i.e.* il existe t_o, $t_1 \in [a\,;b]$ tels que :

$$|f(t_0)| = \max_{t\in[a;b]} |f(t)| \qquad \text{et} \qquad |f(t_1)| = \min_{t\in[a;b]} |f(t)|.$$

ATTENTION

Le théorème des valeurs intermédiaires n'est plus vrai.

La notion de comparaison entre $f(a)$ et $f(b)$ ne peut être adaptée.

ATTENTION

Le théorème des valeurs intermédiaires n'est plus vrai.

La notion de comparaison entre $f(a)$ et $f(b)$ ne peut être adaptée.

Par exemple, la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$ est continue sur $[0\,;2\pi]$.

0 est bien compris entre $f(\pi) = -1$ et $f(0) = 1$, mais $0 \notin f([0\,;2\pi])$ car f ne s'annule pas.

ATTENTION

Le théorème des valeurs intermédiaires n'est plus vrai.

La notion de comparaison entre $f(a)$ et $f(b)$ ne peut être adaptée.

Par exemple, la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$ est continue sur $[0\,;2\pi]$.

0 est bien compris entre $f(\pi) = -1$ et $f(0) = 1$, mais $0 \notin f([0\,;2\pi])$ car f ne s'annule pas.

Remarque : Ici $f(\,[0\,;2\pi]\,)$ n'est pas un intervalle, mais un cercle !