

# Fonctions de la variable réelle - CONTINUITÉ

## I/ Continuité et prolongement

**Rappel 1 :** En résumé et avec les bonnes hypothèses :

- Une fonction  $f$  est continue en  $x_0$  si, et seulement si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .
- Une fonction est prolongeable par continuité en  $x_0$  si, et seulement si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe et est finie.

**Exercice 1 :** Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1.  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{2\sqrt{x+3}}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ -\frac{1}{4} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

2.  $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

3.  $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

4.  $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

5.  $f_5 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\cos(x)-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

6.  $f_6 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

7.  $f_7 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

8.  $f_8 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

9.  $f_9 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

10.  $f_{10} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

11.  $f_{11} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 - x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

**Exercice 2 :** Étudier la continuité des fonctions suivantes en  $n \in \mathbb{Z}$  :

1.  $f_1 : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$                       2.  $f_2 : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$                       3.  $f_3 : x \mapsto \lfloor x \rfloor^2 - x \lfloor x \rfloor + x^2$

**Exercice 3 :** Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité ?

$$f_1 : x \mapsto x \left| 1 + \frac{1}{x} \right| \qquad f_2 : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{x+4}-2} \qquad f_3 : x \mapsto \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}$$

**Exercice 4 :** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue en 0 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x).$$

Montrer que  $f$  est une fonction constante

**Exercice 5 :** On considère la fonction  $\chi_{\mathbb{Q}}$ , appelé fonction de Dirichlet, définie par

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Démontrer que  $\chi_{\mathbb{Q}}$  n'est continue en aucun point de  $\mathbb{R}$ .
- Étudier la continuité sur  $\mathbb{R}$   $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   

$$x \mapsto x\chi_{\mathbb{Q}}(x).$$

## II/ Théorèmes des valeurs intermédiaires et conséquences \_\_\_\_\_

**Exercice 6 :** Soit  $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$  une fonction continue.

- Montrer que  $f$  admet un point fixe.
- Variante :* Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation  $f(x) = x^n$  admet (au moins) une solution sur  $[0; 1]$ .

**Exercice 7 :** Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction continue telle que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que  $f$  admet un minimum sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 8 :** Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bornée et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Montrer que  $g \circ f$  et  $f \circ g$  sont bornées.

**Exercice 9 :** Justifier l'existence d'une unique solution  $\alpha$  dans  $\left] \pi; \frac{3\pi}{2} \right[$  de l'équation  $\tan x = x$ .

Donner une solution approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.

**Exercice 10 :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$ .

Discuter, suivant la valeur de  $a \in \mathbb{R}$ , le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = a$ .

**Exercice 11 :**

1. Montrer que  $f : x \mapsto \frac{2x-1}{x(x-1)}$  réalise une bijection de  $]0; 1[$  dans  $\mathbb{R}$ .
2. Déterminer la limite de  $f^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\right)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 12 :** Soit  $n$ , un entier naturel ( $n \geq 2$ ). On considère l'équation  $(E_n) : x^n - nx + 1 = 0$ .

1. Montrer que  $(E_n)$  admet sur  $[0; 1]$  une unique solution notée  $\alpha_n$ .
2. Montrer que la suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.
3. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{\frac{1}{n}} = 1$ . On écrit alors  $\alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ .

**Exercice 13 :** On définit pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  par  $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$

1. Montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution dans  $\left] 0; \frac{2}{3} \right[$ . On la notera  $u_n$ .
2. Montrer que pour tout  $x \in ]0; 1[$ ,  $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ .
3. Que peut-on en déduire concernant la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ?
4. Montrer que  $u_n$  est convergente vers une limite que l'on notera  $\ell$ .
5. Déterminer la limite de  $(u_n^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et en déduire la valeur de  $\ell$ .

**Exercice 14 :** Soit  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, et soient  $p, q$  deux réels strictement positifs.

Démontrer qu'il existe  $c \in [a; b]$  tel que  $pf(a) + qf(b) = (p+q)f(c)$ .

**Exercice 15 (★) :** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Démontrer que la fonction  $f$  n'est pas continue en 0, mais qu'elle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires *i.e.* que pour tous  $a < b$  de  $\mathbb{R}$  et tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , on peut trouver  $c \in [a; b]$  tel que  $f(c) = k$ .

**Exercice 16 ((★) Existence d'une plus petite période) :** Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction continue périodique non constante.

On veut prouver que  $f$  admet une plus petite période, c'est-à-dire qu'il existe  $T > 0$  tel que

- $f(x + T) = f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
- Pour tout  $0 < \tau < T$ , il existe  $x \in \mathbb{R}$  avec  $f(x + \tau) \neq f(x)$ .

On pose

$$A = \{\tau > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, f(x + \tau) = f(x)\}.$$

1. Justifier que  $A$  admet une borne inférieure que l'on notera  $T$ .
2. Démontrer que  $T > 0$ .
3. Démontrer que  $T$  est une période pour  $f$ .