Fonctions de la variable réelle - CONTINUITÉ

I/ Continuité et prolongement

Rappel 1 : En résumé et avec les bonnes hypothèses :

— Une fonction f est continue en x_0 si, et seulement si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

— Une fonction est prolongeable par continuité en x_0 si, et seulement si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe et est finie.

Exercice 1 : Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{2\sqrt{x+3}}{x-1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ -\frac{1}{4} & \text{si} \quad x = 1 \end{cases} \end{array}$

2. $f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} & \text{si} \quad x \neq 2 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x = 2 \end{cases} \end{array}$

3. $f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$

4. $f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$

5. $f_5 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{\cos(x)-1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$

6. $f_6 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$

7. $f_7 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x\ln|x| & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$

8. $f_8 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 2 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases} \end{array}$

9. $f_9 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$

10. $f_{10} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$

11. $f_{11} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 - x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$

Correction : Simple exercice de limites. Après avoir justifié par les théorèmes généraux que la fonction f est continue sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$, il suffit de vérifier que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe et que, dans ce cas, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ou pas avec $x_0 \in \overline{\mathrm{D}}$.

On trouve :

- f_2, f_4, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{11} sont continues
- f_1, f_3, f_5, f_{10} ne sont pas continues.

Exercice 2 : Étudier la continuité des fonctions suivantes en $n \in \mathbb{Z}$:

1. $f_1 : x \longmapsto x - \lfloor x \rfloor$
2. $f_2 : x \longmapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$
3. $f_3 : x \longmapsto \lfloor x \rfloor^2 - x\lfloor x \rfloor + x^2$

Correction : Soit $n \in \mathbb{Z}$. Les fonctions étant définies sur $\mathbb{R}$,il suffit de comparer $\lim\limits_{\substack{x\to n\\x<n}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to n\\x>n}} f(x)$. Elle sont clairement continues sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

1. $\lim\limits_{\substack{x\to n\\x<n}} f_1(x) = 1 \neq 0 = \lim\limits_{\substack{x\to n\\x>n}} f_1(x)$ donc f_1 n'est pas continue en $n \in \mathbb{Z}$.
2. $\lim\limits_{\substack{x\to n\\x<n}} f_2(x) = \lim\limits_{\substack{x\to n\\x>n}} f_2(x) = n$ donc f_2 est continue en $n \in \mathbb{Z}$ donc sur $\mathbb{R}$.
3. $\lim\limits_{\substack{x\to n\\x<n}} f_3(x) = n^2 - n + 1 \neq n^2 = \lim\limits_{\substack{x\to n\\x>n}} f_3(x)$ donc f_3 n'est pas continue en $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3 : Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité ?

$$f_1 : x \longmapsto x\left|1 + \frac{1}{x}\right| \qquad f_2 : x \longmapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{x+4}-2} \qquad f_3 : x \longmapsto \frac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$$

Correction :

1. f_1 est continue sur $\mathbb{R}^*$.
$$\lim_{\substack{x\to n\\x<0}} f_1(x) = \lim_{x\to 0} -x - 1 = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to n\\x>0}} f_1(x) = \lim_{x\to 0} x + 1 = -1.$$
Donc, $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)$ n'existe pas et $f_1(x)$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.
2. f_2 est continue sur $[-4\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.
$$\lim_{x\to 0} f_2(x) = \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+4}+2\right)\frac{\sin(x)}{x} = 4.$$
Donc, $f_2(x)$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\tilde{f}(0) = 4$.
3. f_3 est continue sur $[-\infty\,;-1[\cup]-1\,;0[\cup]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$. Par parité, il suffit de regarder la continuité sur $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.
   - En 0, $\lim\limits_{\substack{x\to n\\x>0}} f_3(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1}{x-1} = -1$. Donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $\tilde{f}(0) = -1$.

— En 1, $\lim_{x\to 1} f_3(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x-1} = \pm\infty$. Donc, la limite est au mieux infinie (elle n'existe pas de toute façon) donc f_3 n'est pas prolongeable par continuité en 1 ou -1.

On pourra donc seulement prolonger f_3 par continuité sur $[-\infty\,; -1[\cup]-1\,; 1[\cup]1\,; +\infty[$.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x).$$

Montrer que f est une fonction constante

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $f(x) = f(0)$ *i.e.* f est constante à $f(0)$.

Il est facile de montrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{2^n} = 0$, par continuité de f en 0, on peut passer à la limite dans l'égalité précédente et obtenir :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0).$$

La fonction f est constante.

Exercice 5 : On considère la fonction $\chi_{\mathbb{Q}}$, appelé fonction de Dirichlet, définie par

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Démontrer que $\chi_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.
2. Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\chi_{\mathbb{Q}}(x). \end{array}$

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$.

Par densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite d'irrationnel $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x.

1. Comme $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \chi_{\mathbb{Q}}(u_n) = 1$ et $\chi_{\mathbb{Q}}(v_n) = 0$, par passage à la limite, $\chi_{\mathbb{Q}}$ ne peut être continue en x.
2. On considère $f(x) = x\chi_{\mathbb{Q}}(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   — Si $x = 0$, alors $f(0) = 0$. Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0, $f(x_n) = x_n\chi_{\mathbb{Q}}(x_n)$ est bornée par $|x_n|$, donc $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$.

     Ainsi, f est continue en 0.
   — Si $x \neq 0$, on considère les mêmes suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x.

Alors,

$$f(u_n) = u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \quad \text{et} \quad f(v_n) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ces deux limites diffèrent (car $x \neq 0$), donc f n'admet pas de limite en x et n'est pas continue en x.

En conclusion, f est uniquement continue en 0.

II/ Théorèmes des valeurs intermédiaires et conséquences

Exercice 6 : Soit $f : [0\,;1] \to [0\,;1]$ une fonction continue.

1. Montrer que f admet un point fixe.
2. *Variante :* Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = x^n$ admet (au moins) une solution sur $[0\,;1]$.

Correction :

1. La fonction $\varphi : x \longmapsto f(x) - x$ est continue sur $[0\,;1]$ et vérifie $\varphi(0) = f(0) \geqslant 0$ et $\varphi(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ car f prend ses valeurs dans $[0\,;1]$.

   D'après le théorème de Bolzano, l'équation $\varphi(x) = 0$ donc $f(x) = x$ admet une solution sur $[0\,;1]$ *i.e.* f admet un point fixe sur $[0\,;1]$.
2. Le raisonnement est identique avec la fonction $\varphi : x \longmapsto f(x) - x^n$, continue sur $[0\,;1]$ et vérifie $\varphi(0) = f(0) \geqslant 0$ et $\varphi(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$.

   D'après le théorème de Bolzano, l'équation $\varphi(x) = 0$ donc $f(x) = x^n$ admet une solution sur $[0\,;1]$.

Exercice 7 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

Correction : Le résultat qui va nous fournir l'existence du minimum est le théorème des bornes atteintes. C'est le fait que f admet des limites en $\pm\infty$ valant $+\infty$ qui va nous permettre de nous ramener à un segment.

Pour cela, on commence par traduire avec des quantificateurs les propriétés sur les limites :

$$\forall\, \mathrm{A} > 0,\ \exists\, \mathrm{M}_1 > 0,\ \forall\, x \geqslant \mathrm{M}_1,\ f(x) \geqslant \mathrm{A}.$$
$$\forall\, \mathrm{A} > 0,\ \exists\, \mathrm{M}_2 < 0,\ \forall\, x \leqslant \mathrm{M}_2,\ f(x) \geqslant \mathrm{A}.$$

On espère alors appliquer le théorème précédent dans l'intervalle $[\mathrm{M}_2\,;\mathrm{M}_1]$. Il y a encore deux problèmes à régler, qui ne sont pas indépendants :

— On doit être sûr que le minimum de f est effectivement atteint dans l'intervalle $[\mathrm{M}_2\,;\mathrm{M}_1]$,

— et il faut donner une valeur à A pour avoir effectivement des valeurs de M_1 et M_2.

On choisit par exemple $\mathrm{A} = f(0)$. Pour cette valeur de A, la définition de la limite donne les réels M_1 et M_2.

La fonction f est continue sur $[\mathrm{M}_2\,;\mathrm{M}_1]$ donc il existe donc $x_0 \in [\mathrm{M}_2\,;\mathrm{M}_1]$ tel que, pour tout $x \in [\mathrm{M}_2\,;\mathrm{M}_1]$, on ait $f(x) \geqslant f(x_0)$ d'après le théorème des bornes atteintes.

D'autre part, si $x > \mathrm{M}_1$ ou si $x < \mathrm{M}_2$, on a $f(x) \geqslant \mathrm{A} = f(0) \geqslant f(x_0)$.

En conclusion, f atteint bien son minimum en x_0.

Exercice 8 : Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Correction :

$f \circ g$ **:** Comme $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, il est clair que $f \circ g$ est bornée.

$g \circ f$ **:** Comme f est bornée, $f(\mathbb{R}) = [m\,;\mathrm{M}]$ un segment de $\mathbb{R}$ sur lequel g continue est bornée d'après le théorème des bornes atteintes. Donc $g \circ f$ est bornée.

Exercice 9 : Justifier l'existence d'une unique solution α dans $\left]\pi\,;\dfrac{3\pi}{2}\right[$ de l'équation $\tan x = x$.

Donner une solution approchée de α à 10^{-2} près.

Correction : La fonction $\varphi : x \longmapsto \tan(x) - x$ est dérivable sur $\left]\pi\,;\dfrac{3\pi}{2}\right[$ avec, $\forall\, x \in \left]\pi\,;\dfrac{3\pi}{2}\right[$, $\varphi'(x) = \tan^2(x) > 0$ donc elle y est strictement croissante.

Continue, elle y établit donc une bijection entre $\left]\pi\,;\dfrac{3\pi}{2}\right[$ et $f\left(\left]\pi\,;\dfrac{3\pi}{2}\right[\right) = \left]-\pi\,;+\infty\right[$ qui contient 0.

L'équation $\varphi(x) = 0$ admet donc une unique solution α telle que $\tan(\alpha) = \alpha$.

Par dichotomie, on trouve $4,49 < \alpha < 4,5$.

Exercice 10 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$.

Discuter, suivant la valeur de $a \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$.

Correction : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

On peut alors amorcer la discussion suivant les valeurs de a :

— Si $a > -1$, puisque $f(x) \leqslant -1$ si $x \in]-\infty, 2]$, il n'y a pas de solutions à l'équation $f(x) = a$ dans cet intervalle.

  D'autre part, f est continue strictement croissante sur $]2\,;+\infty[$, et $a \in \left]f(2)\,;\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-5\,;+\infty[$. Il y a donc une solution unique dans l'intervalle $]2\,;+\infty[$ à l'équation $f(x) = a$, et donc aussi une solution unique sur $\mathbb{R}$.

— Si $a = -1$, on fait le même raisonnement, en remarquant qu'il n'y a pas de solutions dans $]-\infty\,;0[$ ni dans $]0\,;+\infty[$.

  En revanche, on a aussi $f(0) = -1$. L'équation $f(x) = -1$ admet donc 2 solutions.

— Si $a \in]-5\,;-1[$, alors par le même argument que précédemment (stricte monotonie et valeur ou limite aux bornes), on constate que l'équation $f(x) = a$ admet une solution unique sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$, $]0\,;2[$ et $]2\,;+\infty[$. Il y a donc trois solutions à l'équation $f(x) = a$ sur $\mathbb{R}$.

— Si $a < -5$, alors il ne peut pas y avoir de solutions dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et puisque f est strictement croissante, continue sur $]-\infty\,;0[$ avec $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $f(0) - 1$, l'équation $f(x) = a$ admet une solution unique dans $]-\infty\,;0[$.

— Enfin, si $a = -5$, on trouve deux solutions, l'une dans $]-\infty\,;0[$, et aussi 2.

Exercice 11 :

1. Montrer que $f : x \longmapsto \dfrac{2x-1}{x(x-1)}$ réalise une bijection de $]0\,;1[$ dans $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la limite de $f^{-1}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction :

1. Sur $]0\,;1[$, la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2x-1}{x(x-1)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$ est dérivable et on a :

$$\forall\, x \in]0\,;1[\,,\ f'(x) = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) < 0.$$

La fonction f est donc continue et strictement décroissante sur $]0\,;1[$. D'après le théorème du même nom, elle établit une bijection de $]0\,;1[$ sur son image.

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty$, f réalise une bijection de $]0\,;1[$ dans $\mathbb{R}$.

2. Comme f est continue et strictement monotone sur l'intervalle $]0\,;1[$, sa réciproque l'est également sur $\mathbb{R}$ et
$$\lim_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\right) = f^{-1}\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\right) = f^{-1}(0).$$
Or, $f(x) = 0 \iff \dfrac{2x-1}{x(x-1)} = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$.

Donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2}$.

Exercice 12 : Soit n, un entier naturel ($n \geqslant 2$). On considère l'équation $(\mathrm{E}_n) : x^n - nx + 1 = 0$.

1. Montrer que (E_n) admet sur $[0\,;1]$ une unique solution notée α_n.
2. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
3. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{\frac{1}{n}} = 1$. On écrit alors $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Correction :

1. La fonction $f : x \longmapsto x^n - nx + 1$ est continue sur $[0\,;1]$.

   Comme $f(0) = 1$ et $f(1) = 2 - n \leqslant 0$ pour $n \geqslant 2$, d'après le théorème de Bolzano, (E_n) admet sur $[0\,;1]$ au moins une solution.

   Sur $]0\,;1[$, f est de plus dérivable de dérivée $f'(x) = n\left(x^{n-1} - 1\right) < 0$. Elle est donc strictement monotone. La solution est unique. On la note α_n.
2. Comme $f(1) \neq 0$, $\alpha_n \in [0\,;1[$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \alpha_n^n = 0$ d'après les théorèmes sur les suites géométriques.

   Par définition de α_n et d'après les théorèmes sur les croissances comparées entre a^n et $\dfrac{1}{n}$, on obtient :
$$\alpha_n = \frac{1}{n} + \frac{\alpha_n^n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
   La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
3. Il suffit d'utiliser encore la relation (E_n) :
$$\frac{\alpha_n}{\frac{1}{n}} = n\alpha_n = 1 + \alpha_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

   Donc, $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Exercice 13 : On définit pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n par $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\left]0\,;\dfrac{2}{3}\right[$. On la notera u_n.
2. Montrer que pour tout $x \in]0;1[$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
3. Que peut-on en déduire concernant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
4. Montrer que u_n est convergente vers une limite que l'on notera ℓ.
5. Déterminer la limite de $(u_n^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en déduire la valeur de ℓ.

Correction :

1. La fonction f_n, somme de $x \longmapsto x^n + 9x^2$ et $x \longmapsto -4$ deux fonctions continues sur $\left[0\,;\frac{2}{3}\right]$ l'y est également. Somme de deux fonctions croissantes dont l'une l'est strictement, f est également strictement croissante.

   Comme $f(0) = -4 < 0$ et $f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotone, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $u_n \in \left]0\,;\frac{2}{3}\right[$.
2. Il suffit d'étudier le signe de la différence pour $x \in]0\,;1[$.
$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^n(x-1) < 0.$$
3. Par définition de $u_p \in]0\,;1[$, $f_p(u_p) = 0$ et on a :
$$f_{n+1}(u_n) - f_{n+1}(u_{n+1}) = f_{n+1}(u_n) < f_n(u_n) = 0.$$
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$ et, par stricte croissance de f_{n+1}, $u_n < u_{n+1}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\frac{2}{3}$. D'après le théorème de convergence monotone, elle est donc convergente vers une limite $\ell \leqslant \frac{2}{3}$.
5. Comme $u_n \in]0\,;1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$. Revenons à la définition de u_n : $9u_n^2 = 4 - u_n^n$.

   En passant à la limite, $9\ell^2 = 4 \iff \ell = \frac{2}{3}$ car ℓ est positif.

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc $\frac{2}{3}$.

Exercice 14 : Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, et soient p, q deux réels strictement positifs.

Démontrer qu'il existe $c \in [a\,;b]$ tel que $pf(a) + qf(b) = (p+q)f(c)$.

Correction : Le réel $\frac{p}{p+q}f(a) + \frac{q}{p+q}f(b)$ est clairement un réel de l'intervalle $[f(a)\,;f(b)]$ (ou $[f(b)\,;f(a)]$ si $f(b) < f(a)$), puisqu'il s'écrit $\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$, avec $\lambda \in [0\,;1]$ qui est égal à $\frac{p}{p+q}$.

Puisque la fonction f est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut trouver $c \in [a\,;b]$ tel que
$$f(c) = \frac{p}{p+q}f(a) + \frac{q}{p+q}f(b).$$

Multipliant par $p+q$, c'est exactement le résultat voulu.

Exercice 15 ($\star$) : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Démontrer que la fonction f n'est pas continue en 0, mais qu'elle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires *i.e.* que pour tous $a < b$ de $\mathbb{R}$ et tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, on peut trouver $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = k$.

Correction : Pour prouver que f n'est pas continue en 0, il suffit de trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0, mais telle que $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(0) = 0$.

Ici, $u_n = \dfrac{1}{2n\pi + \dfrac{\pi}{2}}$ convient, puisque $f(u_n) = 1$ pour tout entier n.

Maintenant, il faut prouver que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

Soient $a < b$ deux réels.

— Si $0 \notin [a\,;b]$, alors f est continue sur $[a\,;b]$, et on peut directement appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f.

— Sinon, on a donc $0 \in [a\,;b]$. Sans perte de généralité, on peut supposer $b \neq 0$.

Soit μ entre $f(a)$ et $f(b)$ que l'on peut supposer dans l'intervalle $[-1\,;1]$ et soit $\theta \in [0\,;2\pi[$ tel que $\sin(\theta) = \mu$.

Posons alors $v_n = \dfrac{1}{2n\pi + \theta}$.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, par valeurs supérieures :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } v_{n_0} \in [0\,;b] \subset [a\,;b] \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ f(v_n) = \mu.$$

On a donc bien trouvé (au moins) un élément v_{n_0} de $[a\,;b]$ tel que $f(v_{n_0}) = \mu$ pour μ compris entre $f(a)$ et $(f(b)$.

Ainsi, est une valeur prise par f sur l'intervalle $[a\,;b]$: la fonction f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[a\,;b]$ sans être continue sur $[a\,;b]$.

Exercice 16 (($\star$) Existence d'une plus petite période) : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue périodique non constante.

On veut prouver que f admet une plus petite période, c'est-à-dire qu'il existe $\mathrm{T} > 0$ tel que

— $f(x + \mathrm{T}) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

— Pour tout $0 < \tau < \mathrm{T}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ avec $f(x + \tau) \neq f(x)$.

On pose

$$\mathrm{A} = \{\tau > 0 : \forall\, x \in \mathbb{R}, f(x + \tau) = f(x)\}.$$

1. Justifier que A admet une borne inférieure que l'on notera T.
2. Démontrer que $T > 0$.
3. Démontrer que T est une période pour f.

Correction :

1. A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (puisque f est périodique) et minorée par 0. Elle admet donc une borne inférieure.
2. Soit $x \neq y$ tel que $f(x) \neq f(y)$. Soit $\varepsilon = |f(y) - f(x)| > 0$.

   Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{R}$, $|y - z| < \delta$ entraîne $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$.

   Supposons que $T = 0$. Alors il existe $\tau \in A$ tel que $0 < \tau < \delta$. Mais alors, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x + n\tau \leqslant y < x + (n+1)\tau$, et donc $|y - (x + n\tau)| < \delta$.

   On en déduit que

   $$|f(y) - f(x)| = |f(y) - f(x + n\tau)| < \varepsilon = |f(y) - f(x)|.$$

   Une contradiction. On a donc $T > 0$.
3. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et soit $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers T.

   Puisque $f(x + \tau_n) = f(x)$, la continuité de f en $x + T$ entraîne que $f(x + T) = f(x)$.

   Ainsi, T est bien une période de f, et par construction, c'est la plus petite période de f.