

Suites, Limites et Continuité (début)

1. Suites numériques

- Mode de définition d'une suite réelles : de façon explicite, implicite, par récurrence (simple ou double).
- Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.
- Suites monotones. Suites convergentes, divergentes. Une suite convergente est bornée.
- Une suite est bornée si et seulement la suite des valeurs absolues est majorée.
- Une suite est asymptotiquement du même signe que sa limite (si celle-ci existe et est non nulle).
- Si $u_n \rightarrow l$ alors $|u_n| \rightarrow |l|$ avec réciproque si $l \neq 0$.
- Théorème d'encadrement et de convergence monotone.
- Définition d'une suite extraite. Si la suite converge alors toute suite extraite converge vers la même limite. Réciproque si la suite des termes pairs et la suite des termes impairs convergent vers la même limite.
- Suites adjacentes. Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.
- Moyenne de Cesàro. Si la suite converge alors sa moyenne de Cesàro converge vers la même limite.
- Suites complexes : définition de la limite. Toute suite complexe qui converge est bornée, unicité de la limite, opérations sur les limites.
- Caractérisation de la convergence avec les parties réelles et imaginaires.

2. Limites

- Définition de la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ de f en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
- Unicité de la limite.
- Limite à droite, à gauche.
- Opérations sur les limites.
- Passage à la limite dans les inégalités.
- Si f admet une limite finie alors, f est bornée.
- Théorème d'encadrement, de majoration, de minoration.
- Théorème de la limite monotone.
- Caractérisation séquentielle de la limite.

3. Continuité

- Définition de la continuité, continuité à droite, à gauche.
- Prolongement par continuité.
- Caractérisation séquentielle de la continuité.
- Algorithme de dichotomie, théorème des valeurs intermédiaires.
- Image d'un intervalle par une fonction continue.

Questions de cours possibles ^[1] :

1. Unicité de la limite pour une suite.
2. Théorème d'encadrement, de majoration ou de minoration pour les suites qui devront être énoncés rigoureusement.
3. Théorème de la limite monotone pour les suites.
4. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell > 0$ alors $\exists M \in \mathbb{R}_+^*, u_n \geq M > 0$ à partir d'un certain rang.
5. (*) Pour $q \in \mathbb{R}$, $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 si, et seulement si $q \in]-1; 1[$.

6. (★) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie au moins à partir d'un certain rang et $\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ell} \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$.
7. Théorème des suites adjacentes.
8. Exprimer la limite (finie ou infinie d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition à l'aide de voisinage, d'inégalités, d'intervalles et de majoration de normes. De même pour la limite par valeurs inférieures.
9. Unicité de la limite pour une fonction.
10. Si f admet une limite finie en un point alors elle est bornée en un voisinage de ce point.
11. (★) Comportement de la limite avec les inégalités strictes et larges pour les fonctions.
12. Théorème d'encadrement, de majoration ou de minoration pour les fonctions qui devront être énoncés rigoureusement.
13. (★) Théorème de la limite monotone pour les fonctions.
14. Montrer que $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue à droite sur $\mathbb{R}$.
15. Montrer que f , continue sur D , est prolongeable par continuité en $a \in \overline{D} \setminus D$ si, et seulement si f admet une limite finie en a .
16. Théorème de Bolzano via la borne sup et/ou l'algorithme de dichotomie.
17. Théorème des valeurs intermédiaires. *L'énoncé devra être parfaitement su en entier !*

[1]. La liste des questions de cours possibles n'est donnée qu'à titre indicatif. L'examineur est libre de vous demander tout éclaircissement ou démonstration que réclamera votre prestation en accord avec le programme.