Chapitre

XVII Fonctions de la variable réelle - DÉRIVABILITÉ

CONTENU

Dans tout ce chapitre, I représentera, sauf mentions autres, un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ *i.e.* non vide et non réduit à un singleton ou une réunion d'intervalles tous non triviaux.

I/ Dérivabilité

I.1 Taux d'accroissement et nombre dérivé

Définition 1 (Nombre dérivé, fonction dérivée, tangente) : Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathrm{I}$.

— On dit que f *est dérivable en* a si le taux d'accroissement de f en a $\tau_{a,f}(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand $x \to a$, $x \neq a$.

Dans ce cas, on appelle cette limite *le nombre dérivé de* f *en* a, noté $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

— On dit que f *est dérivable sur* I si f est dérivable en tout $a \in \mathrm{I}$ au sens précédent.

On appelle alors *fonction dérivée* de f sur I, que l'on note f' $\left(\text{ou } \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)$, la fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f en x :

$$f' : \begin{array}{rcl} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x). \end{array}$$

— On note $\mathscr{D}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Interprétation graphique :
Soit $\mathrm{A}\,(a\,;f(a))$ un point de la courbe représentative, donnons nous un autre point $\mathrm{M}\,(x\,;f(x))$ avec $x \in \mathscr{D}_f$, un point variable « pas trop éloigné » de A.
On considère alors les droites (AM), sécantes en A et M à $\mathscr{C}_f$.
Le taux d'accroissement $\tau_{a,f}(x)$ désigne le coefficient directeur de la corde (AM).

$$\tau_{a,f} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

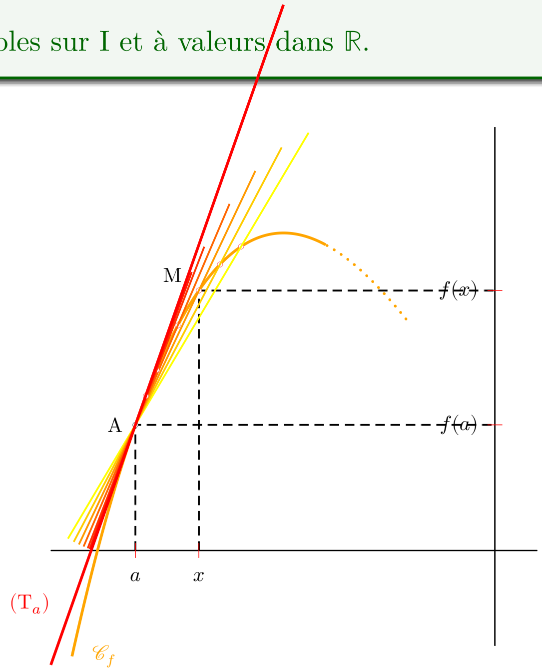


Figure XVII.1 – Tangente à une courbe vue comme limite de ses sécantes.

Exercice 1 (Dérivée usuelle) : Retrouver les fonctions dérivées des fonctions usuelles suivantes et préciser leur domaine de dérivabilité :

1. Les fonctions constantes.
2. $x \longmapsto x^n$, $n \in \mathbb{Z}$.
3. $x \longmapsto \sin(x)$.

Exemples 1 :

— La fonction $x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$ de nombre dérivé respectivement égal à -1 et 1 en tout point de ces intervalles.

Or, $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \neq 1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0}$.

Donc $x \longmapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

— La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, $\forall\, a, x \in \mathbb{R}_+$ et $a \neq x$, on a :

$$\tau_{a,\sqrt{}}(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{a}} & \text{si } a \neq 0 \\ +\infty & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'une manière générale, ce sera le cas pour toutes les réciproques de fonctions dont la dérivée s'annule en ce point (cf. théorème (6)).

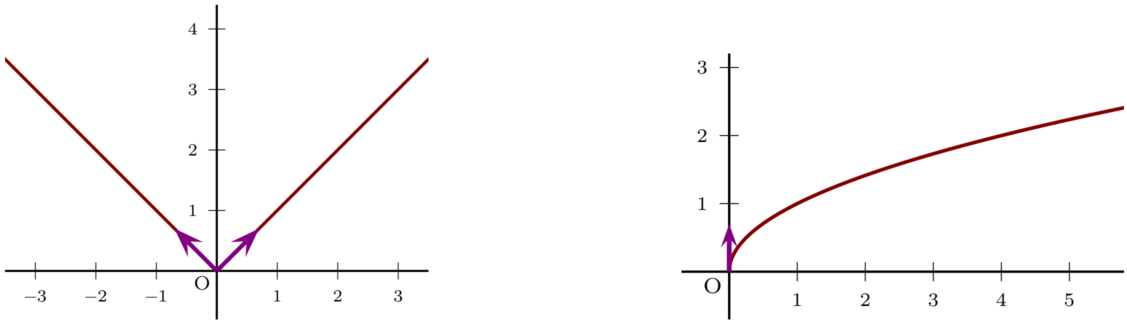


Figure XVII.2 – Les fonctions valeur absolue $x \longmapsto |x|$ et racine carrée $x \longmapsto \sqrt{x}$ ne sont pas dérivables en 0.

Théorème 1 :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

Par la contraposée, une fonction non continue au voisinage d'un point ne peut y être dérivable.

ATTENTION La réciproque de ce théorème est fausse. Pour s'en rendre compte, on peut s'appuyer sur les représentations graphiques de la valeur absolue, de la racine carrée ou, globalement, de celle de la figure (XVII.3) .

I.2 Dérivées à droite et à gauche

De même que pour les limites ou la continuité, on définit les deux dérivées directionnelles à gauche et à droite :

Définition 2 (Dérivabilité à gauche/à droite en un point) : Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathrm{I}$.

Dérivabilité à gauche : On dit que f est *dérivable à gauche* en a si $f_{|\mathrm{I}\cap]-\infty;a]}$ est dérivable en a *i.e.* si la limite $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Cette limite est notée $f'_g(a)$.

Dérivabilité à droite : On dit que f est *dérivable à droite* en a si $f_{|\mathrm{I}\cap[a;+\infty[}$ est dérivable en a *i.e.* si la limite $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Cette limite est notée $f'_d(a)$.

Dans les cas d'existence, $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ s'appellent respectivement les nombres dérivés à gauche et à droite de f en a.

Remarques :

- Dans les cas d'existence, pour $a \in \mathrm{I}$, on a :
$$f'_d(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$
et
$$f'_g(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$
- Dire que f est dérivable à gauche ou à droite en a revient à dire que la fonction
$$\begin{array}{rccl} \tau_{a,f} : & \mathrm{I} \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$$
admet une limite à gauche et à droite respectivement.
- Parce qu'elle n'est qu'un cas particulier de la dérivabilité en général, la dérivabilité à gauche (resp. à droite) implique la continuité à gauche (resp. à droite).
- Évidemment, la première condition pour que la dérivée à gauche (resp. à droite) existe est que cette limite ait un sens, donc que f soit bien définie en a et dans un voisinage à gauche (resp. à droite) de a.

Proposition 2 (Caractérisation de la dérivabilité par f'_d et f'_g) :
Soit $a \in \mathrm{I}$, non égal à une des bornes de I.
$$f \text{ est dérivable en } a \iff \begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche en } a \\ f \text{ est dérivable à droite en } a \\ f'_g(a) = f'_d(a). \end{cases}$$
Dans ce cas, $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

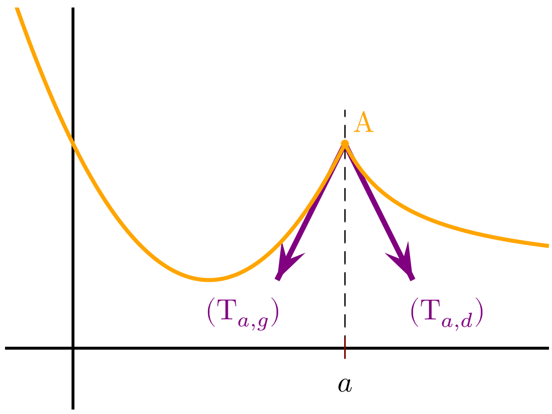


Figure XVII.3 – En un point anguleux, la fonction est continue sans être dérivable.

Exemples 2 :

1. La fonction $x \mapsto |x|$, bien que dérivable à gauche et à droite en 0, n'est pas dérivable en 0.
2. La fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ est dérivable en 0.

Exercice 2 : Montrer que la fonction $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \sin(x) & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$

est dérivable en 0.

ATTENTION

Une fonction peut n'être ni dérivable à gauche ni dérivable à droite en un point.

C'est le cas de la fonction $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$

En effet, $x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0, ni à gauche ni à droite.

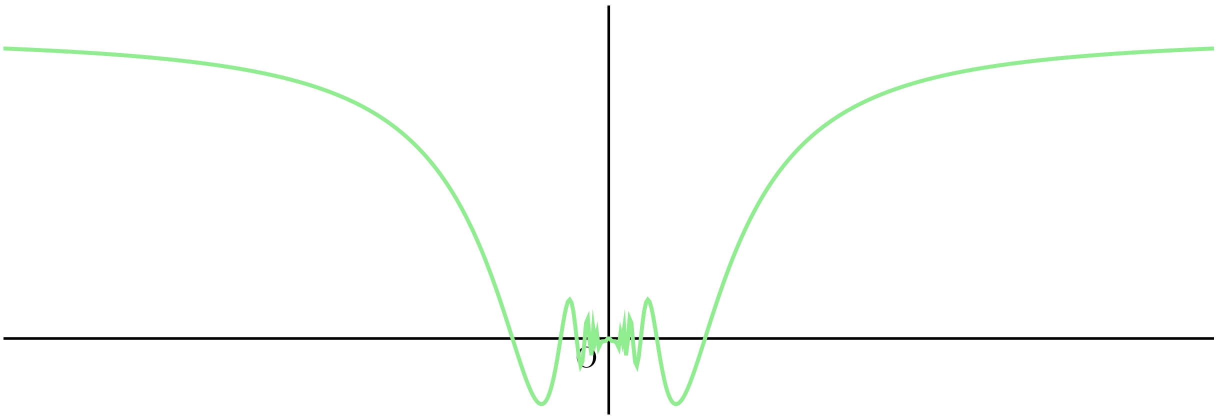


Figure XVII.4 – Une fonction peut être continue sans être dérivable ni à gauche, ni à droite.

I.3 Dérivabilité et approximation affine

Proposition 3 (Développement limité d'ordre 1) :
Soient $f: \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.

f est dérivable en a si, et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon: \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ f(x) = f(a) + (x-a)\,\ell + (x-a)\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0. \tag{XVII.1}$$

De plus, si ℓ existe alors $f'(a) = \ell$:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon(x). \tag{XVII.2}$$

— La relation (XVII.2) est appelée *développement limité à l'ordre* 1 *de* f *en* a.

  La fonction f est donc dérivable en a si, et seulement si elle admet un développement limité d'ordre 1 en a.

— L'application affine $x \longmapsto f(a) + f'(a)(x-a)$ est appelée l'approximation affine de f en a. Sa courbe représentative est la tangente de f au point d'abscisse a.

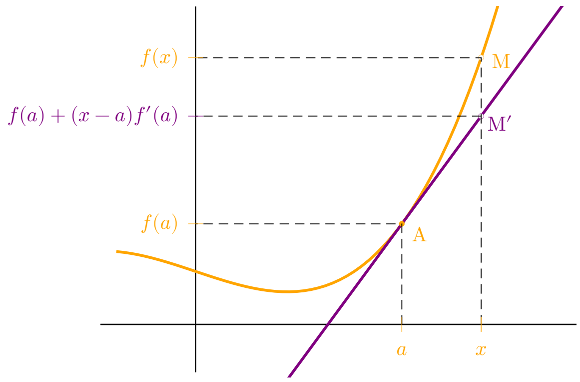


Figure XVII.5 – La tangente est la meilleure approximation affine de f au point a.

Exemple 3 : Par approximation affine

$$\sqrt{4,001} = \sqrt{4+0,001} \simeq \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}0,001 = 2,00025.$$

La calculatrice donne $\sqrt{4,001} \simeq 2,0002499$.

II/ Fonctions dérivables

II.1 Stabilité algébrique

Proposition 4 :
Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.

1. Toute combinaison linéaire $\lambda f + g$ de fonctions dérivables en a est une fonction dérivable en a et
$$(\lambda f+g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a).$$
2. Le produit de deux fonctions dérivables en a est une fonction dérivable en a et
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$
3. L'inverse d'une fonction dérivable en a et *ne s'annulant pas en* a est une fonction dérivable en a et
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}.$$
4. Le quotient de deux fonctions dérivables en a dont *le dénominateur ne s'annule pas en* a est une fonction dérivable en a et
$$\left(\frac{f}{g}\right)(a)' = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Exercice 3 : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} -(x-a)^2 & \text{si } x < a \\ (x-a)^2 & \text{si } x \geqslant a \end{cases} \end{array}$

1. Démontrer que h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction h' est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

II.2 Dérivabilité d'une composée

Proposition 5 :
Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.

La composée d'une fonction dérivable f en a et d'une fonction dérivable g en $f(a)$ est une fonction dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times (g' \circ f)(a).$$

Exercice 4 : Étudier la dérivabilité de la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x(1-x)}\right).$$

Donner sa dérivée le cas échéant.

II.3 Dérivabilité de la réciproque

Théorème 6 (Continuité et dérivabilité de la réciproque) :
Soit $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathrm{J}$ une bijection où I et J sont deux **intervalles** de $\mathbb{R}$.

Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur J et on a :

$$\forall\, b \in \mathrm{J},\ \left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)} = \frac{1}{f'(a)} \quad \text{où } b = f(a).$$

Définition 3 (Difféomorphisme) : On appelle *difféomorphisme* toute bijection dérivable entre deux ouverts de $\mathbb{R}$ dont la bijection réciproque est dérivable.

Exemple 4 : La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}_+^*$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée $\exp' = \exp$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et est strictement monotone.

La fonction exp est donc bijective et sa réciproque $\ln :]0\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\exp^{-1} x)} = \frac{1}{\exp(\exp^{-1} x)} = \frac{1}{x}.$$

Si $f'(a) = 0$, alors, la démonstration précédente prouve que f^{-1} **n'est pas dérivable en** b.

Graphiquement, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point $\mathrm{M}\,(a\,;b)$ où $b = f(a)$. Par symétrie, on en déduit que $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ admet une tangente verticale au point $\mathrm{M}\,(b\,;a)$.

Exemple 5 : $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est bijective et continue sur $\mathbb{R}_+$. Sa réciproque $f^{-1} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ mais n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car $f'(x) = 2x$ s'annule pour $x = 0$.

D'après le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque f^{-1} est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{f(0)\}$, et pour $y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Exercice 5 : Soit $\varphi : x \longmapsto x + \mathrm{e}^x$.

1. Montrer que φ définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble J à déterminer.
2. Justifier que φ^{-1} est dérivable sur J.
3. Déterminer $\left(\varphi^{-1}\right)'(1)$.

II.4 Dérivée d'ordre supérieur

Définition 4 (Dérivée n-ième) : Soient I une réunion d'intervalles et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{K}$. On définit récursivement :

— $f^{(0)} = f$

— $\forall\, n \in \mathbb{N}$, si $f^{(n)}$ est dérivable, $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$.

Si, pour tout $l \leqslant n$, la fonction $f^{(k)}$ existe, on dit que f est n fois dérivable sur I et on appelle $f^{(n)}$ la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f sur I.

On note $\mathscr{D}^n\,(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions définies et n fois dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition 5 (Fonction de classe $\mathscr{C}^n$) : Une fonction f est dite :

— de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I si elle est n fois dérivable sur I et que $f^{(n)}$ est continue.

— de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle I si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notation et remarques : Soit I une réunion d'intervalles non triviaux et $n \in \mathbb{N}$.

— On note $\mathscr{D}^\infty(\mathrm{I};\mathbb{K})$ les fonctions n fois dérivables pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il est facile de montrer que

$$\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I};\mathbb{K}) = \mathscr{D}^\infty(\mathrm{I};\mathbb{K}) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{C}^\infty(\mathrm{I};\mathbb{K}) = \bigcap_{k\geqslant 0} \mathscr{C}^k(\mathrm{I};\mathbb{K}).$$

— Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a la suite d'inclusions ensemblistes :

$$\mathscr{C}^\infty \subsetneq \ldots \subsetneq \mathscr{C}^{k+1} \subsetneq \mathscr{D}^{k+1} \subsetneq \mathscr{C}^k \subsetneq \mathscr{D}^k \subsetneq \ldots \subsetneq \mathscr{C}^1 \subsetneq \mathscr{D}^1 \subsetneq \mathscr{C}^0 \subsetneq \mathscr{D}^0 \subsetneq \mathbb{K}^\mathrm{I} = \mathscr{F}(\mathrm{I};\mathbb{K}).$$

Exemple 6 : L'exponentielle, les fonctions sinus, cosinus, les polynômes, les fractions rationnelles, le logarithme sur leur ensemble de définition sont de classe $\mathscr{C}^\infty$.

De manière générale, la plupart des fonctions que l'on nomme « usuelles » ou « de référence » sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition ou, à défaut, sur l'intérieur de celui-ci.

Exercice 6 : Soit $f : x \longmapsto x^n$ et $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $k \leqslant n$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$.

Proposition 7 (Stabilité de $\mathscr{C}^n(\mathrm{I};\mathbb{K})$) :
Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et I, J des réunions d'intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$.

$\mathscr{C}^n(\mathrm{I};\mathbb{K})$ est stable par combinaisons linéaires :

$\forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \forall\, f, g \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I};\mathbb{K})$,

$$\lambda f + g \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I};\mathbb{K}) \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}.$$

$\mathscr{C}^n(\mathrm{I};\mathbb{K})$ est stable par produit :

$\forall\, f, g \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I};\mathbb{K})$,

$$f \times g \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I};\mathbb{K}) \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}.$$

(Formule de Leibniz)

$\mathscr{C}^n(\mathrm{I};\mathbb{K})$ est « stable » par quotient et composition :

- $\forall\, f, g \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I};\mathbb{K})$, si g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{f}{g} \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I};\mathbb{K})$.
- $\forall\, f \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I};\mathrm{J})$ et $g \in \mathscr{C}^n(\mathrm{J};\mathbb{K})$, $\quad g \circ f \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I};\mathbb{K})$.

$\mathscr{C}^n(\mathrm{I};\mathbb{K})$ est presque stable par réciprocité :

Soient I un **intervalle** et $f \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I};\mathbb{R})$ une bijection de I sur $f(\mathrm{J})$.

Si f' ne s'annule pas sur I alors $f^{-1} \in \mathscr{C}^n(\mathrm{J};\mathrm{I})$.

Tous les assertions précédentes restent vraies si l'on remplace $\mathscr{C}^k$ par $\mathscr{D}^k$.

Exemples 7 :

— La fonction $\exp \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}\,;]0\,;+\infty[)$ et, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x) \neq 0$.

La fonction exp établit donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\exp(\mathbb{R}) =]0\,;+\infty[$.

Sa bijection réciproque, la fonction ln, est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$.

— La fonction $\tan_{|]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[} \in \mathcal{C}^\infty\left(\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\,;\mathbb{R}\right)$ et, $\forall\, x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0$.

La fonction $\tan_{|]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[}$ établit donc une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\tan_{|]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[}\left(\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$.

Sa bijection réciproque, la fonction arctan, est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

— La fonction $\cos_{|]0;\pi[} \in \mathcal{C}^\infty(]0\,;\pi[\,;\mathbb{R})$ et, $\forall\, x \in]0\,;\pi[$, $\cos'(x) = -\sin(x) \neq 0$.

La fonction $\cos_{|]0;\pi[}$ établit donc une bijection de $]0\,;\pi[$ dans $\tan_{|]0;\pi[}(]0\,;\pi[) =]-1\,;1[$.

Sa bijection réciproque, la fonction arccos, est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;1[$.

III/ Théorème des accroissements finis

III.1 Extrema

Théorème 8 (Condition nécessaire d'extremum) :
Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ dérivable en un point intérieur $c \in]a\,;b[$.

Si f admet un extremum local en c, alors $f'(c) = 0$.

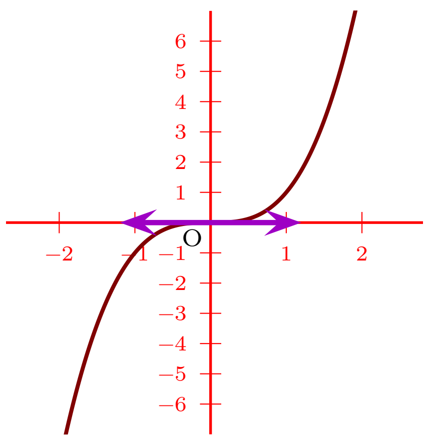
On dit alors que c est un *point critique* ou *stationnaire* (de f).

En un point critique, la courbe représentative de la fonction admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

ATTENTION

La réciproque de ce théorème est fausse : l'annulation de la dérivée n'est qu'une condition **nécessaire**.

La fonction cube $f : x \longmapsto x^3$ admet un point critique en 0 sans que ce ne soit un extremum.



ATTENTION

L'existence d'un extremum n'entraîne en rien la dérivabilité en ce point.

La valeur absolue admet un minimum en 0 où elle n'est pas dérivable.

ATTENTION

C'est évidemment faux si c n'est pas intérieur (cas d'un extremum sur le bord).

Par exemple la fonction $x \longmapsto 1 + x$ admet un maximum sur $[0\,;1]$ en $c = 1$ mais $f'(c) = 1 \neq 0$.

C'est un peu pour cela que l'on préfère regarder des intervalles ouverts lorsqu'on parle de dérivabilité.

Exercice 7 : Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction

$$f\,:\,x \longmapsto \begin{cases} |x|^{\alpha}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \qquad (\alpha > 0).$$

III.2 Théorème de Rolle

Théorème 9 (Théorème de Rolle) :
Soit $f\,:\,[a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ est continue sur $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[$. $(a < b)$

$$\text{Si } f(a) = f(b), \text{ alors il existe } c \in\,]a\,;b[\text{ tel que } f'(c) = 0.$$

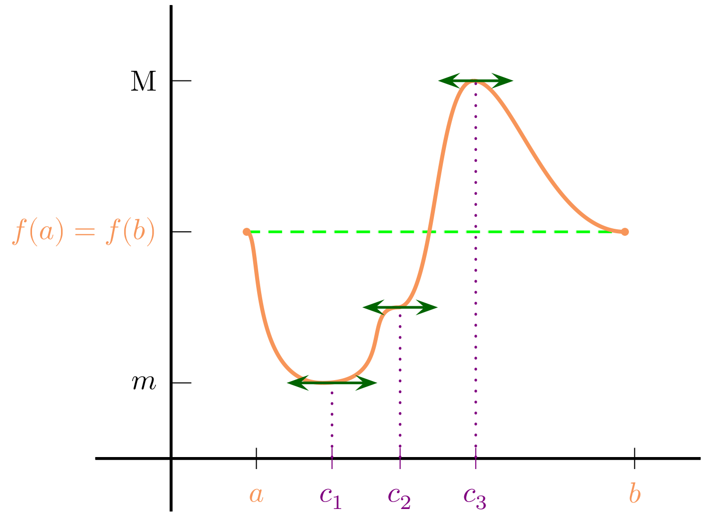


Figure XVII.6 – La courbe d'une fonction dérivable prenant une même valeur en deux points admet une tangente horizontale entre ces derniers.

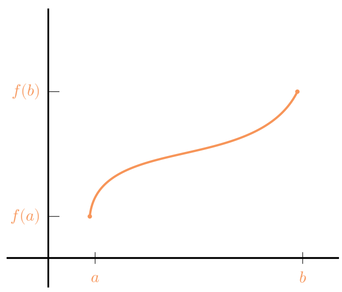


Figure XVII.7 – La condition $f(a) = f(b)$ est nécessaire.

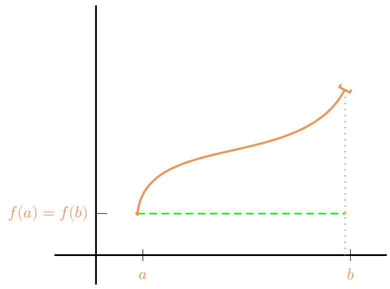


Figure XVII.8 – La continuité est nécessaire.

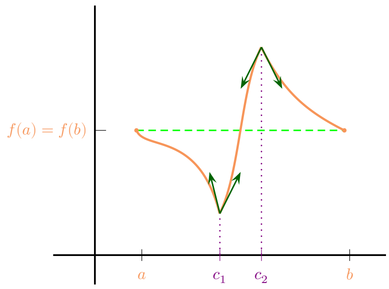


Figure XVII.9 – La dérivabilité est nécessaire.

Remarques :

— Ce théorème est faux si f n'est pas continue en a ou en b. On ne peut se contenter de la dérivabilité sur $]a\,;b[$ qui entraîne seulement la continuité de f sur $]a\,;b[$ ouvert.

Il suffit de prendre $f(x) = x$ sur $[0\,;1[$ et $f(1) = 0$.

— Ce théorème est faux si f est à valeurs complexes car l'ingrédient principal est le *théorème des valeurs intermédiaires* .

Par exemple $t \longmapsto f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$ vérifie $f(0) = f(2\pi)$ mais $f'(t) = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$ ne s'annule jamais sur $[0\,;2\pi]$.

Exemple 8 : Si $f \in \mathscr{C}^2([a\,;b]\,;\mathbb{R})$ et $f(a) = f(b) = f'(a) = 0$ alors f'' s'annule sur $]a\,;b[$.

Exercice 8 (Le Classique) : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ et deux fois dérivable sur $]a, b[$ $(a < b)$.

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dfrac{(b-a)^2}{2} f''(c)$.

III.3 Théorème des accroissements finis

Théorème 10 (Égalité des accroissements finis) :
Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$. $\quad (a < b)$

Alors, il existe $c \in \,]a\,;b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) \iff f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

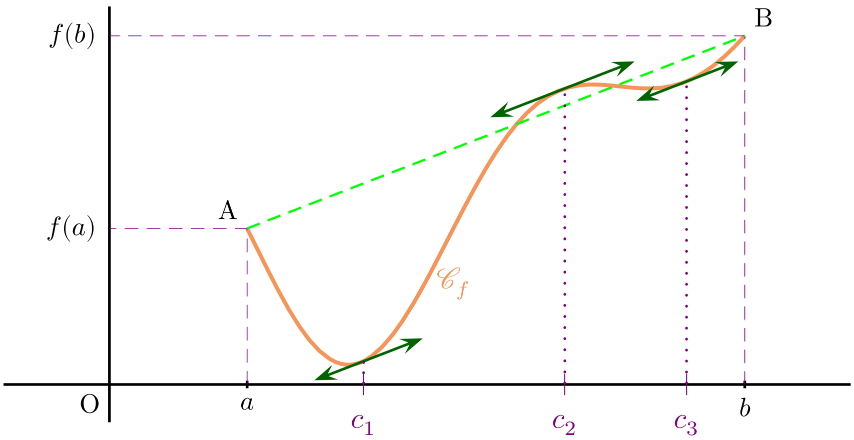


Figure XVII.10 – La courbe d'une fonction dérivable passant par deux points A et B admet une tangente parallèle à la droite (AB) entre ces derniers.

Théorème 11 (Inégalité des accroissements finis) :
Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$.

S'il existe deux réels m et M tels que $\forall\, x \in\,]a\,;b[, \quad m \leqslant f'(x) \leqslant \mathrm{M}$ alors

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant \mathrm{M}(b-a).$$

Un peu de physique [1] : Ces inégalités ont une interprétation cinématique assez évidente : si on court, par exemple, deux heures avec une vitesse oscillant entre 7 et 12 kilomètres par heure, on aura sûrement parcouru entre 14 et 24 kilomètres.

Exercice 9 : Trouver un majorant de l'erreur commise en remplaçant $\sqrt{10001}$ par 100.

Exemple 9 (Fonctions lipschitziennes) : Soit $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ et soit $k \in \mathbb{R}_+^*$ alors f est lipschitzienne de rapport k sur I si :

$$\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{I}^2 \,/\, x \neq y, \quad \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \leqslant k.$$

Or, $\forall\ (x\,;y) \in \mathrm{I}^2$, tels que $x \neq y$, $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ représente la pente de la corde passant par les points $\mathrm{M}\,(x\,;f(x))$ et $\mathrm{N}\,(y\,;f(y))$.

Ainsi, f est lipschitzienne si les pentes de toutes les cordes de $\mathscr{C}_f$ sont bornées.

Exemples 10 :

— Une fonction constante sur un intervalle I est 0-lipschitzienne sur I.
— Grâce à l'inégalité triangulaire, $f : x \longmapsto |x|$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
— Pour tout réel x, $\sin'(x) = \cos(x)$ et donc $|\sin'(x)| \leqslant 1$.

[1]. Pas trop compliquée

On en déduit que pour tous réels x et y,

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leqslant |x - y|.$$

De la même façon, on montre que $|\cos(x) - \cos(y)| \leqslant |x - y|$.

Les fonctions cos et sin sont 1-lipschitziennes.

— Pour tout x, y de $[1\,;+\infty[$, on a :

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|.$$

La fonction $\sqrt{}$ est donc $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[1\,;+\infty[$.

Exercice 10 : Montrer que la fonction $x \longmapsto x^2$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Proposition 12 :
Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ est continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$.

f' est bornée sur $]a\,;b[$ si, et seulement si f est k-lipschitzienne sur $[a\,;b]$.

Exemple 11 : Sur tout voisinage de zéro, la dérivée de $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas bornée donc elle ne peut y être lipschitzienne.

Corollaire 12.1 :
Toute fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un **segment** est lipschitzienne sur ce segment.

Exercice 11 :

1. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \dfrac{1}{x}$.
2. En déduire la nature des suites de terme général :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \text{ et } \mathrm{T}_n = \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} \text{ (pour } k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \text{ fixé).}$$

3. Déterminer de même le comportement de : $\left(\displaystyle\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p\ln p}\right)_{n\geqslant 2}$.

IV/ Applications

IV.1 Caractérisation de la monotonie

Théorème 13 (Caractérisation des fonctions constantes dérivables) :
Soient I un **intervalle** et $f \in \mathscr{D}(\mathrm{I}\,;\mathbb{R})$.

$$f \text{ est constante sur I si, et seulement si } f' \text{ est identiquement nulle sur } \mathring{\mathrm{I}}.$$

ATTENTION

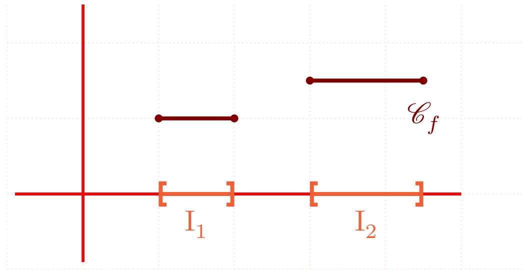


Figure XVII.11 – f est constante sur I_1 et I_2 mais n'est pas constante sur $\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_2$.

Théorème 14 (Caractérisation des fonctions monotones dérivables) :
Soient I un intervalle contenant au moins deux points distincts et f une fonction dérivable sur I à valeurs **réelles**.

1. f est croissante sur I si, et seulement si f' est positive ou nulle sur $\mathring{\mathrm{I}}$.
2. f est strictement croissante I si, et seulement si f' est positive ou nulle et qu'il n'existe aucun intervalle $[a\,;b] \subset \mathring{\mathrm{I}}$ avec $a < b$ sur lequel f' est identiquement nulle.

On dispose bien sûr d'un résultat analogue sur les fonctions décroissantes.

Remarque : En particulier si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathring{\mathrm{I}}$ sauf peut-être en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I.

Pas de réciproque ! La fonction $x \longmapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors que sa dérivée n'y est pas strictement positive et s'annule en 0.

ATTENTION

L'hypothèse « I est un intervalle » est indispensable ici. Le théorème est faux si I est une réunion d'intervalles.

La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$.

Or, la fonction f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$: $f(-1) < f(1)$.

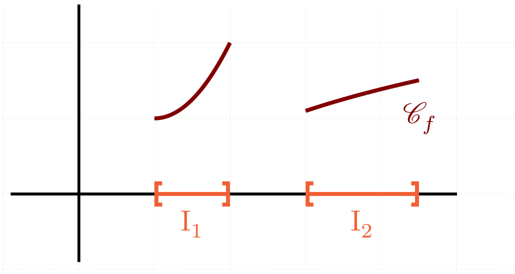


Figure XVII.12 – f est croissante sur I_1 et I_2 donc $f' \geqslant 0$ mais n'est pas croissante sur $\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_2$.

ATTENTION

On peut avoir $f'(a) > 0$ en un point a sans que f soit strictement croissante au voisinage de a.

C'est le cas de $f : x \longmapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{x}{2}$.

- On peut prolonger continument f par 0 en 0
- Bien sûr, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et en revenant au taux d'accroissement de f, on montre aisément que $f'(0) = \dfrac{1}{2} > 0$.
- Pourtant $\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{2}$.

  pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, f' change donc de signe régulièrement au voisinage de 0, donc f change de sens de variation régulièrement au voisinage de 0. [2]

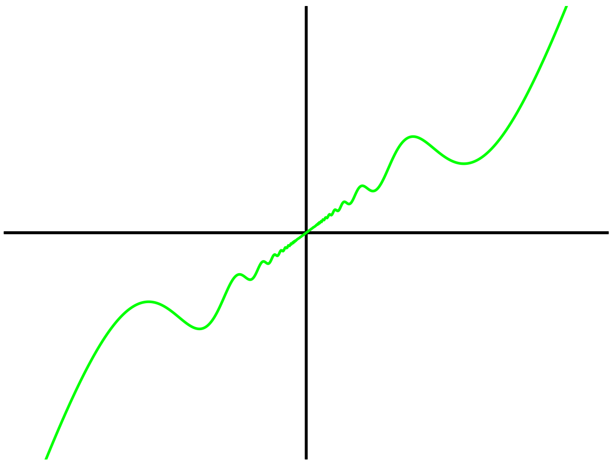


Figure XVII.13 – Une fonction dérivable peut avoir une dérivée strictement positive en un point sans être monotone sur un voisinage de celui-ci.

[2]. Brièvement la preuve:le terme $x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est petit au voisinage de 0 et négligeable devant le terme $\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ qui prend une infinité de fois les valeurs 1 et -1. f' prend donc une infinité de fois au voisinage de 0 des valeurs proches de $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3}{2}$ et change de signe autant de fois sur ces voisinages non réduits à un point. f en fait donc autant avec sa monotonie.

IV.2 Prolongement de classe $\mathscr{C}^1$

Théorème 15 (Théorème de la limite de la dérivée) :
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$.

$$\text{Si } \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{alors} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell.$$

1. Si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a avec $f'(a) = \ell$ *i.e.* f est dérivable sur I tout entier et f' est continue en a.
2. Si $\ell = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en a mais sa courbe représentative admet une tangente verticale au point d'abscisse a.

Exemple 12 : La fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exemple 13 : arcsin est dérivable sur $]-1\,;1[$ et $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ dont la limite en $x = \pm 1$ est $+\infty$.

On retrouve ainsi que arcsin n'est pas dérivable en ± 1 et qu'il y a une tangente verticale en ces point pour la courbe.

ATTENTION Si f' n'a pas de limite en a alors on ne peut rien dire.

Remarques :

— La continuité en a est une hypothèse nécessaire.

Exemple 14 : La fonction $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$ est dérivable et continue sur $\mathbb{R}^*$.

On a, de plus, $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$ mais f n'est pas dérivable en 0 car $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \to 0} -\dfrac{1}{x}$ n'existe pas.

— Ce résultat est intéressant pour étudier la dérivabilité d'une fonction en un point où les théorèmes généraux ne s'appliquent pas sans revenir au taux d'accroissement.

Exemple 15 : Considérons la fonction $f : x \longmapsto x^2 \ln(x)$.

Cette fonction est définie et $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et peut se prolonger par continuité en posant $f(0) = 0$.

Par ailleurs, $\forall\, x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) = 2x\ln(x) + x$ a certainement aussi une limite nulle en 0.

Le théorème de prolongement de la dérivée permet alors d'affirmer que la fonction prolongée est dérivable en 0, et que $f'(0) = 0$: de classe $\mathscr{C}^1$ donc.

Exercice 12 : On définit $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ par $g(0) = 0$ et, $\forall\, x \neq 0$, $g(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner l'expression de g'.
2. La fonction g' a-t-elle une limite en 0 ?
3. La fonction g est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Corollaire 15.1 (Prolongement de classe $\mathscr{C}^1$) :
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ continue sur I et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$.

$$\text{Si } \lim_{x\to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R} \text{ alors } f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur I et } f'(a) = \ell.$$

Ce théorème peut se généraliser à $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{I} \setminus \{a\}$ si les dérivées $f^{(j)}$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$ ont toutes une limite finie en a.

V/ Fonctions à valeurs complexes

ATTENTION

Comme on l'a vu, beaucoup de propriétés vraies pour les fonctions à valeurs réelles ne le sont plus pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ notamment :

— L'image d'un intervalle par une fonction continue n'est pas un intervalle.
— Le théorème des valeurs intermédiaires n'est plus vrai.
— Le théorème de Rolle n'est plus vrai.
— Le théorème des accroissements finis non plus.

Théorème 16 (Inégalité des accroissements finis) :
Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{C}$ continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$.

S'il existe un réel positif M tel que $\forall\, x \in]a\,;b[$, $\quad |f'(x)| \leqslant \mathrm{M}$ alors

$$\Big|f(b) - f(a)\Big| \leqslant \mathrm{M}\big|b-a\big|.$$

Exemple 16 : La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t}$ est 1-lipschitzienne.

En particulier, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $|\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,a} - \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,b}| \leqslant |a-b|$.

La notion de fonctions monotones pour des fonctions à valeurs complexes n'a aucun sens mais on peut, cependant, caractériser les fonctions constantes :

Théorème 17 (Caractérisation des fonctions constantes dérivables) :
Soient I un **intervalle** et $f \in \mathscr{D}(\mathrm{I}\,;\mathbb{C})$.

$$f \text{ est constante sur I si, et seulement si } f' \text{ est identiquement nulle sur } \mathring{\mathrm{I}}.$$

Pour résumer ce qui est vrai ou non pour une fonction à valeurs complexes :

À retenir 1 :

Ce qu'on garde	Ce qu'on ne garde pas
Une fonction continue sur un segment $[a\,;b]$ est bornée au sens que $\|f\|$ l'est	Le théorème des valeurs intermédiaires
Dérivabilité $\implies$ Continuité	Théorème de dérivabilité de la fonction réciproque
Opérations sur les dérivées	Théorème de Rolle
Inégalité des accroissements finis	Théorème des accroissements finis
Dérivée bornée $\implies$ f lipschitzienne	Annulation aux extrema locaux
Dérivée nulle sur un intervalle I $\implies$ f constante sur I	Lien monotonie et signe de la dérivée
	Théorème de prolongement de la dérivée et prolongement $\mathscr{C}^1$

Exercice 13 : Étudier la dérivabilité et donner la fonction dérivée des fonctions à valeurs complexes $\varphi : t \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}}$ et $\psi : t \longmapsto \mathrm{e}^{\arccos(t)+\mathrm{i}\,\arcsin(t)}$.