

Fonctions de la variable réelle - DÉRIVABILITÉ

I/ Dérivabilité et calculs de dérivées

Exercice 1 : Déterminer :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}.$$

$$2. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 2 (Dérivée usuelle) : Retrouver les fonctions dérivées des fonctions usuelles suivantes et préciser leur domaine de dérivabilité :

$$1. x \mapsto \sqrt{x}.$$

$$2. x \mapsto \exp(x).$$

$$3. x \mapsto \cos(x).$$

Exercice 3 : Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

$$1. x \mapsto |\sin(x)|$$

$$4. x \mapsto (x-1)\sqrt{1-x^2}$$

$$7. x \mapsto \sqrt{x^3 \arcsin(x)}$$

$$2. x \mapsto |x|^3$$

$$5. x \mapsto 2 - (x-2)|x-2|$$

$$3. x \mapsto \lfloor x \rfloor$$

$$6. x \mapsto |5 - 7x + 2x^2|$$

Exercice 4 (Quelques inégalités) : Montrer que :

$$1. \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x \leq \tan(x).$$

$$2. \forall x \in \mathbb{R}, |\cos(x) - 1| \leq \frac{x^2}{2}.$$

$$3. \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}.$$

$$4. \forall \theta, \phi \in \mathbb{R}, |e^{i\theta} - e^{i\phi}| \leq |\theta - \phi|.$$

Exercice 5 : Après avoir rapidement précisé le domaine de dérivabilité, donner l'expression de la dérivée des fonctions suivantes :

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $x \mapsto (x^3 + x - 2)^4$ | 15. $x \mapsto \frac{(\ln x)^4}{x}$ | 28. $x \mapsto \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ |
| 2. $x \mapsto (1 + x)\sqrt{1 + x}$ | 16. $x \mapsto \frac{e^{x - \frac{1}{x}}}{x^2 - 1}$ | 29. $x \mapsto \ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ |
| 3. $x \mapsto x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ | 17. $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x) + 2}}$ | 30. $x \mapsto \ln 7 - 2x $ |
| 4. $x \mapsto x^2\sqrt{x}$ | 18. $x \mapsto \frac{3\pi}{\tan(5x)}$ | 31. $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ |
| 5. $x \mapsto x^2 \cos(x) \sin(x)$ | 19. $x \mapsto \frac{5}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ | 32. $x \mapsto x^x$ |
| 6. $x \mapsto (x + \sin(x))^4$ | 20. $x \mapsto \frac{x}{1 + \sqrt{x}}$ | 33. $x \mapsto x^{x^2}$ |
| 7. $x \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ | 21. $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2x}$ | 34. $x \mapsto x^{x^x}$ |
| 8. $x \mapsto \frac{x^3}{1 + x^2}$ | 22. $x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ | 35. $x \mapsto (1 + x^4)^{1-2x}$ |
| 9. $x \mapsto \frac{(x+1)^3}{\sqrt{x}}$ | 23. $x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ | 36. $x \mapsto \pi^{x^2-1}$ |
| 10. $x \mapsto \frac{2x^3 - 1}{x\sqrt{1 + x^2}}$ | 24. $x \mapsto \sqrt{x^2 + 6x - 1}$ | 37. $x \mapsto \cos(\ln(1 + \sqrt{x}))$ |
| 11. $x \mapsto \frac{\cos(x)}{1 + \sqrt{x}}$ | 25. $x \mapsto \sqrt{\sin\left(\frac{1}{2 + x^2}\right)}$ | 38. $x \mapsto \sin\left(\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right)$ |
| 12. $x \mapsto \frac{\sqrt{x-2}}{2 + \sin(x)}$ | 26. $x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ | 39. $x \mapsto \cos^4(x) - \sin^4(x)$ |
| 13. $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x) - \cos(x)}$ | 27. $x \mapsto \ln \sqrt{1 + x^2}$ | 40. $x \mapsto (1 + x)\sqrt{1 + x}$ |
| 14. $x \mapsto \frac{1}{(e^x + e^{-x})^2}$ | | 41. $x \mapsto x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ |
| | | 42. $x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ |
| | | 43. $x \mapsto \sin\left(\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right)$ |
| | | 44. $x \mapsto \tan^3(x)$ |

Exercice 6 :

- Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$.
- Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 :

1. Soit
- f
- définie sur
- $\mathbb{R}$
- par
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{1+x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer
- $a, b \in \mathbb{R}$
- de manière à ce que la fonction
- f
- définie sur
- $\mathbb{R}_+$
- par

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soit
- f
- définie sur
- $\mathbb{R}$
- par
- $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x < 1; \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Montrer que f est continue mais n'est pas dérivable en 1 et en donner une interprétation géométrique.**II/ Dérivées $n^{\text{èmes}}$** _____**Exercice 8 :**

1. Soit
- $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
- la fonction définie par
- $f(x) = \sin(x)$
- .

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

2. Déterminer une formule analogue pour
- $\cos^{(n)}$
- .

3. En déduire les dérivées
- $n^{\text{èmes}}$
- de :

(a) $s_1 : x \mapsto \sin(2x)$

(b) $s_2 : x \mapsto \cos^3(x)$

4. Soit
- $f : \mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}$
- la fonction définie par
- $f(x) = \frac{1}{x}$
- .

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$.

5. Pour
- $n \in \mathbb{N}^*$
- , on définit
- f_n
- sur
- $\mathbb{R}_+^*$
- par
- $f_n(x) = x^{n-1} \ln(x)$
- .

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, f_n^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}$.

6. Soit
- $f : x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$
- .

Déterminer $f^{(n)}(0)$ pour tout entier n .Aide : On pourra chercher une relation entre f et f' .

Exercice 9 : $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de :

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $\phi_1 : x \mapsto xf(x)$ | 3. $\phi_3 : x \mapsto x^3f(x)$ |
| 2. $\phi_2 : x \mapsto x^2f(x)$ | 4. $\psi : x \mapsto \frac{1}{x}f(x)$ |

Exercice 10 : On définit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $\forall x \neq 0, f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
- Démontrer que pour tout $x \neq 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x)$ est de la forme $P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$ où P_n est une fonction polynomiale.
- En déduire que f est dérivable à tout ordre en 0, et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(n)}(0) = 0$. On dit que la fonction f est *plate* en 0.

III/ Prolongements

Exercice 11 : Parmi les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^* : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$, lesquelles sont prolongeables par continuité en 0 ? L'éventuel prolongement est-il dérivable sur $\mathbb{R}$? de classe $\mathcal{C}^1$? de classe $\mathcal{C}^\infty$?

Exercice 12 :

- Soit $f :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right)$$

- Montrer que f se prolonge par continuité en 0 et en 1.
- Étudier la dérivabilité en 0 et en 1 de ce prolongement.

- Mêmes questions avec $g :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x \exp\left(\frac{1}{\ln x}\right)$$

- Soit $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = x|x|$.

- Démontrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction h' est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 13 : Soit $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x \arcsin(x) + \sqrt{1 - x^2}$$

- Montrer que f est continue sur $[-1; 1]$, dérivable sur $] -1; 1[$.

2. Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1; 1[$.
3. Montrer que f est dérivable sur $[-1; 1]$.
4. En déduire :

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} - \frac{\pi}{2}}{x-1}.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + \frac{\pi}{2}}{x+1}.$$

Exercice 14 : Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivable au point x_0 .

1. Montrer que le rapport $\frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0, et calculer cette limite.
2. Étudier la réciproque.

Exercice 15 : Justifier que $f : x \mapsto x^3 + x + 1$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Justifier que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(f^{-1})'(x)$ pour $x = -1$ et $x = 1$.
2. La fonction f^{-1} est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$?

IV/ Rolle et TAF _____

Exercice 16 : Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|.$
2. $\forall x \geq 0, x \leq e^x - 1 \leq xe^x.$

Exercice 17 : Soit f dérivable sur $[a, b]$ avec $|f'| \leq k$. On suppose $f(a)$ et $f(b)$ connus.

Représenter la région où se trouve $\mathcal{C}_f$ sur $[a, b]$.

Exercice 18 : Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ ($a < b$).

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$

Exercice 19 : Soit $f : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a; b[$, et vérifiant $f(a) = f(b) = 0$.

Soit $d \in \mathbb{R} \setminus [a; b]$. Montrer qu'il existe une tangente à la courbe représentative de f passant par le point $(d; 0)$.

Exercice 20 : Soit $f : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$. On suppose que f s'annule au moins $n + 1$ fois sur $[a; b]$, et que f est n -fois dérivable sur $]a; b[$.

1. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet au moins n solutions sur $]a; b[$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 21 (Taylor-Lagrange) : Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et n un entier naturel.

Soit f une fonction élément de $C^n([a; b], \mathbb{R}) \cap D^{n+1}(]a; b[, \mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Aide : Appliquer le théorème de Rolle à la fonction $g(x) = f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (b-x)^k - A \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ où A est intelligemment choisi.

Exercice 22 (*) Formule des trapèzes) :** Soit $f \in C^2([a; b], \mathbb{R}) \cap D^3(]a; b[, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2} (f'(a) + f'(b)) - f^{(3)}(c).$$

Aide : Appliquer le théorème de Rolle à g' puis g où $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2} (f'(x) + f'(a)) - A(x-a)^3$ où A est intelligemment choisi.

Que devient cette formule si on remplace f par F une primitive d'une fonction f de classe C^1 sur $]a; b[$ et deux fois dérivable sur $]a; b[$? Interprétez géométriquement.

Exercice 23 (*) Polynômes de Legendre) :** Pour n entier naturel non nul donné, on pose $L_n = ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n .
2. En étudiant le polynôme $A_n = (X^2 - 1)^n$, montrer que L_n admet n racines réelles simples et toutes dans $] -1; 1[$.

Exercice 24 : Montrer que pour tout réel strictement positif x , on a : $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$.