Fonctions de la variable réelle - DÉRIVABILITÉ

I/ Dérivabilité et calculs de dérivées

Exercice 1 : Déterminer :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}$.
2. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

Correction :

1. Comme $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$, on a :
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \times \frac{x}{\ln(1+x)} = 1.$$
2. Tant que l'on ne connaît pas encore les développement limités, cette limite est un peu sophistiquée. On effectue un changement de variable pour se ramener à une limite connue en posant $\theta = \arccos(x)$ *i.e.* $x = \cos(\theta)$ et on a :
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \theta(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \arccos(x) = 0^+ \implies \lim_{x\to 1} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} \underset{\sin(x)>0}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{\substack{\theta\to 0\\ \theta>0}} \frac{\theta}{\sin(\theta)} = 1.$$

Exercice 2 (Dérivée usuelle) : Retrouver les fonctions dérivées des fonctions usuelles suivantes et préciser leur domaine de dérivabilité :

1. $x \longmapsto \sqrt{x}$.
2. $x \longmapsto \exp(x)$.
3. $x \longmapsto \cos(x)$.

Correction : La dérivabilité étant une notion locale, il suffit de regarder la dérivabilité de f en un point a quelconque de I pour pouvoir conclure à la dérivabilité sur I tout entier.

Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque.

1. Soit $f : x \longmapsto \sqrt{x}$. On considère $a \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque.

   Alors, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \underset{a\neq 0}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Fonctions de la variable réelle - DÉRIVABILITÉ

Donc f est dérivable en a de nombre dérivée $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$. Elle l'est sur $\mathbb{R}_+^*$ tout entier et

$$f' : x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2. Soit $f : x \longmapsto \exp(x)$.

Alors, $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\exp(a+h)-\exp(a)}{h}$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \exp(a) \underbrace{\frac{\exp(h)-1}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 1}$$

$$= \exp(a).$$

Donc f est dérivable en a de nombre dérivée $f'(a) = \exp(a)$. Elle l'est sur $\mathbb{R}$ tout entier et

$$f' : x \longmapsto \exp(x).$$

3. Soit $f : x \longmapsto \cos(x)$.

Alors, $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h}$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \cos(a) \underbrace{\frac{\cos(h)-1}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0} - \sin(a) \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 1}$$

$$= -\sin(a).$$

Donc f est dérivable en a de nombre dérivée $f'(a) = -\sin(a)$. Elle l'est sur $\mathbb{R}$ tout entier et

$$f' : x \longmapsto -\sin(x).$$

Exercice 3 : Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

1. $x \longmapsto |\sin(x)|$
2. $x \longmapsto |x|^3$
3. $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$
4. $x \longmapsto (x-1)\sqrt{1-x^2}$
5. $x \longmapsto 2-(x-2)|x-2|$
6. $x \longmapsto |5-7x+2x^2|$
7. $x \longmapsto \sqrt{x^3 \arcsin(x)}$

Correction :

1. D'après les théorèmes sur les composées de fonctions dérivables, $x \longmapsto |\sin(x)|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

   De plus, en zéro :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{|\sin(x)|-|\sin(0)|}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -\frac{\sin(x)}{x} = -1 \neq 1 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin(x)}{x}.$$

   Elle n'est donc pas dérivable en 0.

2. D'après les théorèmes sur les composées de fonctions dérivables, $x \longmapsto |x|^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

De plus, en zéro :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{|x|^3-|0|^3}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} -\frac{x^3}{x} = 0 = \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{x^3}{x}.$$

La fonction $x \longmapsto |x|^3$ est donc dérivable en 0 donc sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3. La fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas continue en $n \in \mathbb{Z}$ donc elle ne peut y être dérivable. Constante, elle l'est sur $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n\,;n+1[$.
4. D'après les théorèmes généraux, $x \longmapsto (x-1)\sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[-1\,;1]$ et dérivable sur $]-1\,;1[$.

   De plus, $\lim_{\substack{x\to 1\\x<1}} \frac{(x-1)\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\x<1}} \sqrt{1-x^2} = 0$ donc elle est dérivable sur $]-1\,;1]$. Elle n'est pas dérivable en -1.
5. Le même raisonnement montre que $x \longmapsto 2-(x-2)|x-2|$ est dérivable sur $]-\infty\,;2[\cup]2\,;+\infty[$ puis

$$\lim_{x\to 2} \frac{2-(x-2)|x-2|-2}{x-2} = \lim_{x\to 2} |x-2| = 0.$$

   La fonction est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier.
6. $x \longmapsto 5-7x+2x^2 = (x-1)(2x-5)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ si, et seulement si $x \in]-\infty\,;1] \cup \left[\frac{5}{2}\,;+\infty\right[$. La fonction $x \longmapsto |5-7x+2x^2|$ est donc dérivable sur $]-\infty\,;1[\cup\left]\frac{5}{2}\,;+\infty\right[$ et on ne peut pas prolonger la dérivabilité.
7. — La fonction $x \longmapsto x^3 \arcsin(x)$ est dérivable sur $]-1\,;1[$ par produit, positive sur $[-1\,;1]$ et nulle seulement en 0.

     Cette fonction est donc dérivable sur $]-1\,;1[\setminus\{0\}$ à valeurs DANS $\mathbb{R}_+^*$.

     La fonction racine carrée étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ SEULEMENT, $x \longmapsto \sqrt{x^3\arcsin(x)}$ est dérivable sur $]-1\,;1[\setminus\{0\}$ par composition.

   — Ce raisonnement ne nous apprend rien sur la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^3\arcsin(x)}$ en 0 car nos théorèmes d'opérations sur la dérivabilité nous parlent de dérivabilité mais pas de NON-dérivabilité.

     De fait, la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^3\arcsin(x)}$ est quand même dérivable en 0 car :

$$\frac{\sqrt{x^3\arcsin(x)}-0}{x-0} = \frac{\sqrt{x^4}}{x}\times\sqrt{\frac{\arcsin(x)}{x}} = x\sqrt{\frac{\arcsin(x)-\arcsin(0)}{x-0}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0\times\sqrt{\arcsin'(0)} = 0.$$

     On pourrait montrer en revanche que $x \longmapsto \sqrt{x^3\arcsin(x)}$ n'est pas dérivable en -1 et 1.

Exercice 4 (Quelques inégalités) : Montrer que :

1. $\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$.
2. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ |\cos(x)-1| \leqslant \frac{x^2}{2}$.
3. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$.
4. $\forall\, \theta, \phi \in \mathbb{R},\ \left|e^{i\theta}-e^{i\phi}\right| \leqslant |\theta-\phi|$.

Correction :

1. La méthode la plus jolie reste d'invoquer la concavité de la fonction $\sin$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ puisqu'elle y est deux fois dérivable et que sa dérivée $-\sin$ y est négative. Sa courbe est donc au-dessous de sa tangente en 0 qui est $y=x$ et au-dessus de la sécante en 0 et $\frac{\pi}{2}$ d'équation $y=\frac{\pi}{2}x$, ce qui donne :

$$\forall\, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[,\ \frac{2}{\pi}x\leqslant\sin(x)\leqslant x.$$

De même, la fonction $\tan$ dont la dérivée $x\longmapsto 1+\tan^2(x)$ est croissante comme somme de fonctions croissantes est convexe sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ donc sa courbe est au-dessus de sa tangente en 0 d'équation $y=x$ ce qui s'écrit :

$$\forall\, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[,\ x\leqslant\tan(x).$$

2. Pour tout x réel, $\cos(x)\leqslant 1$, donc montrer $|\cos(x)-1|\leqslant\frac{x^2}{2}$ revient à montrer que $1-\cos(x)\leqslant\frac{x^2}{2}$.

Or, $\forall\, x\in\mathbb{R}_+$, $\sin(x)\leqslant x$. D'après la croissance de l'intégrale sur $\mathbb{R}_+$, on obtient alors

$$\forall\, x\in\mathbb{R}_+,\ \int_0^x\sin(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x t\,\mathrm{d}t\implies 1-\cos(x)\leqslant\frac{x^2}{2}.$$

La relation étant paire, elle s'étend à tout $x\in\mathbb{R}_-$.

En conclusion, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $|\cos(x)-1|\leqslant\frac{x^2}{2}$.

3. Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$, La fonction $t\longmapsto\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}$ est continue et décroissante sur tout intervalle de $\mathbb{R}_+^*$.

En particulier, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\forall\, t\in[n\,;n+1]\subset\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}\leqslant\frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$$

et, par croissance de l'intégrale sur $[n\,;n+1]$:

$$\begin{aligned}\int_n^{n+1}\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t&\leqslant\frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}\int_n^{n+1}\ \mathrm{d}t\\ \left[-\frac{1}{t^\alpha}\right]_n^{n+1}&\leqslant\frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}\\ \frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{(n+1)^\alpha}&\leqslant\frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}.\end{aligned}$$

4. La fonction $t\longmapsto\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$ à valeurs complexes est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur tout intervalle $[\theta\,;\phi]$ (en supposant $\theta<\phi$) et dérivable sur $]\theta\,;\phi[$.

Comme, $\forall\, t\in[\theta\,;\phi]$, $\left|\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\right)'\right|=\left|\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\right|\leqslant 1$, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall\,\theta,\phi\in\mathbb{R},\ \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}\right|\leqslant|\theta-\phi|.$$

Exercice 5 : Après avoir rapidement précisé le domaine de dérivabilité, donner l'expression de la dérivée des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto (x^3+x-2)^4$
2. $x \longmapsto (1+x)\sqrt{1+x}$
3. $x \longmapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$
4. $x \longmapsto x^2\sqrt{x}$
5. $x \longmapsto x^2\cos(x)\sin(x)$
6. $x \longmapsto (x+\sin(x))^4$
7. $x \longmapsto \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$
8. $x \longmapsto \dfrac{x^3}{1+x^2}$
9. $x \longmapsto \dfrac{(x+1)^3}{\sqrt{x}}$
10. $x \longmapsto \dfrac{2x^3-1}{x\sqrt{1+x^2}}$
11. $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{1+\sqrt{x}}$
12. $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x-2}}{2+\sin(x)}$
13. $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}$
14. $x \longmapsto \dfrac{1}{(e^x+e^{-x})^2}$
15. $x \longmapsto \dfrac{(\ln x)^4}{x}$
16. $x \longmapsto \dfrac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2-1}$
17. $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)+2}}$
18. $x \longmapsto \dfrac{3\pi}{\tan(5x)}$
19. $x \longmapsto \dfrac{5}{\sqrt{x^2+x+1}}$
20. $x \longmapsto \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$
21. $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}}{2x}$
22. $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$
23. $x \longmapsto \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$
24. $x \longmapsto \sqrt{x^2+6x-1}$
25. $x \longmapsto \sqrt{\sin\left(\dfrac{1}{2+x^2}\right)}$
26. $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$
27. $x \longmapsto \ln\sqrt{1+x^2}$
28. $x \longmapsto \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$
29. $x \longmapsto \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$
30. $x \longmapsto \ln|7-2x|$
31. $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$
32. $x \longmapsto x^x$
33. $x \longmapsto x^{x^2}$
34. $x \longmapsto x^{x^x}$
35. $x \longmapsto (1+x^4)^{1-2x}$
36. $x \longmapsto \pi^{x^2-1}$
37. $x \longmapsto \cos\left(\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right)$
38. $x \longmapsto \sin\left(\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\right)$
39. $x \longmapsto \cos^4(x)-\sin^4(x)$
40. $x \longmapsto (1+x)\sqrt{1+x}$
41. $x \longmapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$
42. $x \longmapsto \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$
43. $x \longmapsto \sin\left(\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\right)$
44. $x \longmapsto \tan^3(x)$

Correction :

1. $x \longmapsto 4(3x^2+1)(x^3+x-2)^3$
2. $x \longmapsto \dfrac{3}{2}\sqrt{1+x}$
3. $x \longmapsto \dfrac{x^2+x-1}{(x+1)^2}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
4. $x \longmapsto \dfrac{5}{2}x\sqrt{x}$
5. $x \longmapsto 2x\cos(x)\sin(x) - x^2\sin^2 x + x^2\cos^2 x$
6. $x \longmapsto 4(1+\cos(x))(x+\sin(x))^3$
7. $x \longmapsto -\dfrac{5}{2}x^{-\frac{7}{2}}$
8. $x \longmapsto \dfrac{x^2(3+x^2)}{(1+x^2)^2}$
9. $x \longmapsto \dfrac{(x+1)^2(5x-1)}{2x\sqrt{x}}$
10. $x \longmapsto \dfrac{2x^5+4x^3+2x^2+1}{x^2(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$
11. $x \longmapsto -\dfrac{2(x+\sqrt{x})\sin(x)+\cos(x)}{2(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}}$
12. $x \longmapsto \dfrac{2+\sin(x)-2(x-2)\cos(x)}{2(2+\sin(x))^2\sqrt{x-2}}$
13. $x \longmapsto -\dfrac{1}{(\sin(x)-\cos(x))^2}$
14. $x \longmapsto \dfrac{-2(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^3}$
15. $x \longmapsto \dfrac{(4-\ln x)(\ln x)^3}{x^2}$
16. $x \longmapsto \dfrac{(x^4-2x^3-1)e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2(x^2-1)^2}$
17. $x \longmapsto \dfrac{-\sin^2 x-4\sin(x)-1}{2(\sin(x)+2)\sqrt{\sin(x)+2}}$
18. $x \longmapsto \dfrac{-15\pi(1+\tan^2 5x)}{\tan^2 5x}$
19. $x \longmapsto -\dfrac{5}{2}\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}}$
20. $x \longmapsto \dfrac{2+\sqrt{x}}{2(1+\sqrt{x})^2}$
21. $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{2x^2}$
22. $x \longmapsto \dfrac{-1}{(x+1)^2}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$
23. $x \longmapsto \dfrac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$
24. $x \longmapsto \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+6x-1}}$
25. $x \longmapsto \dfrac{-x\cos\left(\frac{1}{2+x^2}\right)}{(2+x^2)^2\sqrt{\sin\left(\frac{1}{2+x^2}\right)}}$
26. $x \longmapsto \dfrac{x^2(2x-3)}{2(x-1)^2}\sqrt{\dfrac{x-1}{x^3}}$
27. $x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2}$
28. $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
29. $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}\tan\dfrac{1}{x}$
30. $x \longmapsto \dfrac{-2}{7-2x}$
31. $x \longmapsto \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$
32. $x \longmapsto (1+\ln x)x^x$
33. $x \longmapsto (1+2\ln x)x^{1+x^2}$
34. $x \longmapsto (\ln^2 x+\ln x+\dfrac{1}{x})x^{x^x+x}$
35. $x \longmapsto \left(-2\ln(x^4+1)+\dfrac{4(1-2x)x^3}{x^4+1}\right)(1+x^4)^{1-2x}$
36. $x \longmapsto 2x\ln(\pi)\pi^{x^2-1}$
37. $x \longmapsto \dfrac{-\sin\left(\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right)}{2\left(1+\sqrt{x}\right)\sqrt{x}}$
38. $x \longmapsto \dfrac{-2}{x(x+2)}\cos\left(\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\right)$
39. $x \longmapsto -4\cos(x)\sin(x)$
40. $x \longmapsto \dfrac{3}{2}\sqrt{1+x}$
41. $x \longmapsto \dfrac{x^2+x-1}{(x+1)^2}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
42. $x \longmapsto \dfrac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$
43. $x \longmapsto -\dfrac{2}{x(x+2)}\cos\left(\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\right)$
44. $x \longmapsto 3\tan^2(x)(1+\tan^2 x)$

Exercice 6 :

1. Montrer que, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$.
2. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Correction :

1. Il est connu que $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$, $\sin(t) \leqslant t$.

   Par croissance de l'intégrale, on obtient alors successivement :

   $$\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^x \sin(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x t\,\mathrm{d}t \implies 1 - \cos(x) \leqslant \frac{x^2}{2}.$$

   Puis,

   $$\int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^x 1 - \frac{t^2}{2}\,\mathrm{d}t \implies \sin(x) \geqslant x - \frac{x^3}{6}.$$

   En conclusion, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$.
2. D'après les théorèmes généraux et de croissances comparées en 0, la fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

   Le taux d'accroissement de f dans un voisinage de 0 privé de celui-ci, s'écrit $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{\sin(x) - x}{x^2}$.

   Or, d'après la question précédente, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{x}{6} \leqslant \dfrac{\sin(x) - x}{x^2} \leqslant 0$.

   D'après le théorème d'encadrement, f est donc dérivable en 0 par valeurs supérieures de nombre dérivé 0.

   Si $x \in \mathbb{R}_-^*$, alors $-x \in \mathbb{R}_+^*$ et on a encore $\dfrac{-x}{6} \leqslant \dfrac{\sin(-x) + x}{x^2} \leqslant 0 \iff 0 \leqslant \dfrac{\sin(x) - x}{x^2} \leqslant \dfrac{x}{6}$.

   Le même raisonnement entraine que f est également dérivable en 0 par valeurs inférieures de même nombre dérivé donc elle l'est en 0 puis sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 7 :

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \begin{cases} ax+b & \text{si } x<0\\ \sqrt{1+x} & \text{si } x\geqslant 0.\end{cases}\end{array}$

   Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1\\ ax^2+bx+1 & \text{si } x>1.\end{cases}\end{array}$$

   soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x<1;\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x\geqslant 1\end{cases}$

   Montrer que f est continue mais n'est pas dérivable en 1 et en donner une interprétation géométrique.

Correction :

1. D'après les théorèmes généraux, f est déjà continue et dérivable sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

   Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{x+1}=1$, f n'est continue en 0 que si, et seulement si $b=1$.

   $x\longmapsto\sqrt{1+x}$ est dérivable en 0 de nombre dérivé $\dfrac{1}{2}$. La fonction f sera donc dérivable sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si $a=\dfrac{1}{2}$ et $b=1=$.
2. D'après le même raisonnement que précédemment en 1, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si $a+b+1=1$ et $2a+b=\dfrac{1}{2}$ *i.e.* $a=-b=\dfrac{1}{2}$.
3. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}-2x=-2\neq -1=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}-\dfrac{1}{x^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f'(x)$.

   Donc f n'est pas dérivable en 0. Sa courbe admet deux demi-tangentes à gauche et à droite respectivement de coefficient directeur -2 et -1.

II/ Dérivées $n^{\text{èmes}}$

Exercice 8 :

1. Soit $f:\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=\sin(x)$.

   Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\forall\, x\in\mathbb{R},\ f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$.
2. Déterminer une formule analogue pour $\cos^{(n)}$.
3. En déduire les dérivées $n^{\text{èmes}}$ de :

(a) $s_1 : x \longmapsto \sin(2x)$

(b) $s_2 : x \longmapsto \cos^3(x)$

4. Soit $f : \mathbb{R}^* \longmapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit f_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = x^{n-1}\ln(x)$.

   Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall\, x > 0,\ \ f_n^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{x}$.
6. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

   Déterminer $f^{(n)}(0)$ pour tout entier n.

Aide : On pourra chercher une relation entre f et f'.

Exercice 9 : $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de :

1. $\phi_1 : x \longmapsto x f(x)$
2. $\phi_2 : x \longmapsto x^2 f(x)$
3. $\phi_3 : x \longmapsto x^3 f(x)$
4. $\psi : x \longmapsto \dfrac{1}{x} f(x)$

Exercice 10 : On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $\forall\, x \neq 0,\ f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Démontrer que pour tout $x \neq 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x)$ est de la forme $\mathrm{P}_n\left(\dfrac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ où P_n est une fonction polynomiale.
3. En déduire que f est dérivable à tout ordre en 0, et que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, f^{(n)}(0) = 0$. On dit que la fonction f est *plate* en 0.

III/ Prolongements

Exercice 11 : Parmi les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^*$: $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x \longmapsto x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x \longmapsto x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $x \longmapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$, lesquelles sont prolongeables par continuité en 0 ? L'éventuel prolongement est-il dérivable sur $\mathbb{R}$? de classe $\mathscr{C}^1$? de classe $\mathscr{C}^\infty$?

Correction : Une simple étude de limite montre que $x \longmapsto x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x \longmapsto x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $x \longmapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ sont prolongeables par continuité en 0 en posant 0 comme valeur en ce point.

La fonction $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'ayant pas de limite en 0 ne l'est pas.

Les théorèmes généraux et l'étude des taux d'accroissement en 0 ou le théorème de la limite de la dérivée puis du prolongement de classe $\mathscr{C}^1$ montrent également que les prolongements des fonctions $x \longmapsto x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $x \longmapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ sont dérivables et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en s'aidant des théorèmes de croissances comparées pour la dernière.

La fonction $x \longmapsto x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ dont le taux d'accroissement en 0 n'a pas de limite en 0 n'y est pas dérivable.

Enfin, seule le prolongement de la fonction $x \longmapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ en 0 et donc sur $\mathbb{R}$ d'après l' exercice (10) .

Exercice 12 :

1. Soit $f : \begin{array}{rcl}]0\,;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp\left(\dfrac{1}{\ln x}.\right) \end{array}$
   (a) Montrer que f se prolonge par continuité en 0 et en 1.
   (b) Étudier la dérivabilité en 0 et en 1 de ce prolongement.
2. Mêmes questions avec $g : \begin{array}{rcl}]0\,;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\exp\left(\dfrac{1}{\ln x}.\right) \end{array}$
3. Soit $h : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $\forall\, x \in \mathbb{R},\ h(x) = x|x|$.
   (a) Démontrer que h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) La fonction h' est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 13 : Soit $f : \begin{array}{rcl} [-1\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} \end{array}$

1. Montrer que f est continue sur $[-1\,;1]$, dérivable sur $]-1\,;1[$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1\,;1[$.
3. Montrer que f est dérivable sur $[-1\,;1]$.
4. En déduire :

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} - \frac{\pi}{2}}{x-1}$. (b) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + \frac{\pi}{2}}{x+1}$.

Exercice 14 : Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ dérivable au point x_0.

1. Montrer que le rapport $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0, et calculer cette limite.

2. Étudier la réciproque.

Correction : Il suffit de couper en passant par $f(x_0)$:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\right) \to \frac{f'(x_0)+f'(x_0)}{2}.$$

La réciproque est clairement fausse. Il suffit de prendre $f(x)=|x|$ et $x_0=0$.

Exercice 15 : Justifier que $f : x \longmapsto x^3+x+1$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Justifier que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(f^{-1})'(x)$ pour $x=-1$ et $x=1$.
2. La fonction f^{-1} est-elle de classe $\mathscr{C}^\infty$?

IV/ Rolle et TAF

Exercice 16 : Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ |\arctan(x)-\arctan(y)| \leqslant |x-y|$.
2. $\forall\, x \geqslant 0,\ x \leqslant e^x - 1 \leqslant xe^x$.

Correction :

1. On rappelle que la fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

   De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\left|\frac{1}{1+x^2}\right| \leqslant 1.$$
   L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $\arctan$ entre x et y donne alors le résultat.
2. On appelle cette fois le théorème (et non l'inégalité !) des accroissements finis à e^x entre 0 et x. Il existe donc $c \in \,]0\,;x[$ tel que
   $$\mathrm{e}^x - 1 = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^c(x-0) = \mathrm{e}^c x.$$
   Puisque $1 \leqslant \mathrm{e}^c \leqslant \mathrm{e}^x$ et $x \geqslant 0$, on en déduit l'inégalité demandée.

Exercice 17 : Soit f dérivable sur $[a,b]$ avec $|f'| \leqslant k$. On suppose $f(a)$ et $f(b)$ connus.

Représenter la région où se trouve $\mathcal{C}_f$ sur $[a,b]$.

Exercice 18 : Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ $(a < b)$.

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $[f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c)$.

Exercice 19 : Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a\,;b[$, et vérifiant $f(a) = f(b) = 0$.

Soit $d \in \mathbb{R} \setminus [a\,;b]$. Montrer qu'il existe une tangente à la courbe représentative de f passant par le point $(d\,;0)$.

Correction : L'équation de la tangente au point d'abscisse x_0 est

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Cette tangente passe par le point $(d, 0)$ si, et seulement si

$$f'(x_0)(x_0 - d) - f(x_0) = 0.$$

On va chercher une fonction dont la dérivée va être presque de la forme précédente, et on va montrer par le théorème de Rolle que la dérivée de cette fonction s'annule.

Pour cela, on pose $g(x) = \dfrac{f(x)}{x - d}$ définie et continue sur $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[$, de dérivée

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x-d) - f(x)}{(x-d)^2}.$$

De plus, $g(a) = g(b) = 0$. Par le théorème de Rolle, on peut trouver $x_0 \in]a\,;b[$ tel que $g'(x_0) = 0$.

Pour ce x_0, la relation

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - d}$$

est donc vérifiée, et la tangente à la courbe représentative de f au point $(x_0, f(x_0))$ passe par $(d\,;0)$.

Exercice 20 : Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$. On suppose que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[a\,;b]$, et que f est n-fois dérivable sur $[a\,;b]$.

1. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet au moins n solutions sur $]a\,;b[$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Correction :

1. Soit $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$ des points distincts de I sur lesquels f s'annule.

   Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, f est continue sur $[a_k\,;a_{k+1}]$ et dérivable sur $]a_k\,;a_{k+1}[$ donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c_k \in]a_k\,;a_{k+1}[$ tel que $f'(c_k) = 0$.

Enfin, puisque $a_1 < c_1 < a_2 < \ldots < a_n < c_n < a_{n+1}$, les n valeurs c_k, $k \in [\![1\,;n]\!]$ sont deux a deux disjoints, ce qui permet de conclure.

2. On montre par récurrence sur $k \in [\![1\,;n]\!]$ la propriete $\mathcal{P}(k)$: $f^{(k)}$ s'annule au moins $n+1-k$ fois sur $]a\,;b[$.

   On a $\mathcal{P}(1)$ vraie d'après la question précédente.

   Soit $k \in [\![1\,;n]\!]$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

   Par hypothèse de récurrence $f^{(k)}$ s'annule au moins $n+1-k$ fois sur $[a\,;b]$, disons en $r_1 < \ldots < r_{n+1-k}$.

   Pour $i \in [\![1\,;n-k]\!]$, $f^{(k)}$ est continue sur $[r_i\,;r_{i+1}]$, dérivable sur $]r_i\,;r_{i+1}[$ (car f est n-fois dérivable sur $[a\,;b]$) et $f^{(k)}(r_i) = f^{(k)}(r_{i+1}) = 0$, donc par le théorème de Rolle, il existe $s_i \in]r_i\,;r_{i+1}[$ tel que $f^{(k+1)}(s_i) = 0$.

   Comme $a < s_1 < r_1 < \ldots < s_{n-k} < b$, on a montré que $f^{(k+1)}$ s'annule au moins $n-k$ fois sur $]a\,;b[$, ainsi $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

   En conclusion $\forall\, k \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie et en particulier, $\mathcal{P}(n)$ *i.e.* $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois en $c \in\,]a\,;b[$ avec $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 21 (Taylor-Lagrange) : Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et n un entier naturel.

Soit f une fonction élément de $\mathrm{C}^n([a\,;b]\,,\mathbb{R}) \cap \mathrm{D}^{n+1}(]a\,;b[\,,\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Aide : Appliquer le théorème de Rolle à la fonction $g(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - \mathrm{A}\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ où A est intelligemment choisi.

Correction : On a déjà $g(b) = f(b) - f(b) = 0$. Puisque $a \neq b$, on peut choisir A tel que $g(a) = 0$ (à savoir $\mathrm{A} = \dfrac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}\left(f(b) - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right)$.

Avec les hypothèses faites sur f, g est d'autre part continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$. Le théorème de Rolle permet alors d'affirmer qu'il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Pour $x \in\,]a\,;b[$, on a :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} + \mathrm{A}\frac{(b-x)^n}{n!} \\
&= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k + \mathrm{A}\frac{(b-x)^n}{n!} = -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + \mathrm{A}\frac{(b-x)^n}{n!} \\
&= \frac{(b-x)^n}{n!}(\mathrm{A} - f^{(n+1)}(x)).
\end{aligned}$$

Ainsi, il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que $\dfrac{(b-c)^n}{n!}(\mathrm{A} - f^{(n+1)}(c)) = 0$, et donc, puisque $c \neq b$, tel que $\mathrm{A} = f^{(n+1)}(c)$.

L'égalité $g(a)=0$ s'écrit alors

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c),$$

pour un certain réel c de $]a\,;b[$.

Exercice 22 (* Formule des trapèzes) :** Soit $f\in C^2([a\,;b]\,,\mathbb{R})\cap D^3(]a\,;b[\,,\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c\in\,]a\,;b[$ tel que

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{2}(f'(a)+f'(b))-f^{(3)}(c).$$

Aide : Appliquer le théorème de Rolle à g' puis g où $g(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{x-a}{2}(f'(x)+f'(a))-A(x-a)^3$ où A est intelligemment choisi.

Que devient cette formule si on remplace f par F une primitive d'une fonction f de classe C^1 sur $[a\,;b]$ et deux fois dérivable sur $]a\,;b[$? Interprétez géométriquement.

Correction : Pour $x\in[a\,;b]$, posons $g(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{x-a}{2}(f'(x)+f'(a))-A(x-a)^3$ où A est choisi de sorte que $g(b)=g(a)=0$ (c'est-à-dire $A=\dfrac{1}{(b-a)^3}(f(b)-f(a)-\dfrac{b-a}{2}(f'(b)+f'(a)))$.

$f\in C^2([a\,;b]\,,\mathbb{R})\cap D^3(]a\,;b[\,,\mathbb{R})$ et donc $g\in C^1([a\,;b]\,,\mathbb{R})\cap D^2(]a\,;b[\,,\mathbb{R})$.

Pour $x\in[a\,;b]$, on a :

$$g'(x)=f'(x)-\frac{1}{2}(f'(x)+f'(a))-\frac{x-a}{2}f''(x)-3A(x-a)^2,$$

puis

$$g''(x)=\frac{1}{2}f''(x)-\frac{1}{2}f''(x)-\frac{x-a}{2}f^{(3)}(x)-6A(x-a)=\frac{x-a}{2}(-12A-f^{(3)}(x)).$$

g est continue sur $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[$ et vérifie de plus $g(a)=g(b)$.

Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $d\in\,]a\,;b[$ tel que $g'(d)=0$.

De même, g' est continue sur $[a,d]\subset[a\,;b]$, dérivable sur $]a,d[(\neq\emptyset)$ et vérifie de plus $g'(a)=g'(d)(=0)$.

D'après le théorème de Rolle, il existe $c\in]a,d[\subset\,]a\,;b[$ tel que $g''(c)=0$ ou encore tel que $A=-\dfrac{1}{12}f^{(3)}(c)$ (puisque $c\neq a$).

En écrivant explicitement l'égalité $g(b)=0$, on a montré que :

$$\exists c\in\,]a\,;b[\;/\;f(b)=f(a)+\frac{b-a}{2}(f'(b)+f'(a))-\frac{1}{12}f^{(3)}(c)(b-a)^3.$$

Si $f\in C^1([a\,;b]\,,\mathbb{R})\cap D^2(]a\,;b[\,,\mathbb{R})$ et si F est une primitive de f sur $[a\,;b]$, la formule précédente s'écrit :

$$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)=\frac{b-a}{2}(F'(b)+F'(a))-\frac{1}{12}F^{(3)}(c)(b-a)^3=\frac{b-a}{2}(f(b)+f(a))-\frac{1}{12}f''(c)(b-a)^3.$$

Donc, si $f \in \mathrm{C}^1([a\,;b]\,,\mathbb{R}) \cap \mathrm{D}^2(]a\,;b[\,,\mathbb{R})$,

$$\exists c \in \,]a\,;b[\,/\int_a^b f(t)\,dt = \frac{b-a}{2}(f(b)+f(a)) - \frac{1}{12}f''(c)(b-a)^3.$$

Interprétation géométrique : Si f est positive, $\mathrm{A}_1 = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est l'aire du domaine

$\mathrm{D} = \{\mathrm{M}(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ et $\mathrm{A}_2 = \dfrac{b-a}{2}(f(b)+f(a))$ est l'aire du trapèze $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ f(b) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$.

Si $\mathrm{M}_2 = \sup\{|f''(x)|,\ x \in [a\,;b]\}$ existe dans $\mathbb{R}$, on a :

$$|\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2| \leqslant \mathrm{M}_2\frac{(b-a)^3}{12}.$$

Exercice 23 (*I Polynômes de Legendre) :** Pour n entier naturel non nul donné, on pose $\mathrm{L}_n = ((\mathrm{X}^2-1)^n)^{(n)}$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n.
2. En étudiant le polynôme $\mathrm{A}_n = (\mathrm{X}^2-1)^n$, montrer que L_n admet n racines réelles simples et toutes dans $]-1;1[$.

Correction :

1. $(\mathrm{X}^2-1)^n$ est de degré $2n$ et donc, L_n est de degré $2n-n=n$. Puis, $\mathrm{dom}(\mathrm{L}_n) = \mathrm{dom}((\mathrm{X}^{2n})^{(n)}) = \dfrac{(2n)!}{n!}$.
2. 1 et -1 sont racines d'ordre n de A_n et donc racines d'ordre $n-k$ de $\mathrm{A}_n^{(k)}$, pour tout k élément de $\{0,\ldots,n\}$.

   Montrons par récurrence sur k que $\forall\, k \in \{0,\ldots,n\}$, $\mathrm{A}_n^{(k)}$ s'annule en au moins k valeurs deux à deux distinctes de l'intervalle $]-1\,;1[$.

   Pour $k=1$, A_n est continu sur $[-1\,;1]$ et dérivable sur $]-1\,;1[$.

   De plus, $\mathrm{A}_n(0) = \mathrm{A}_n(1) = 0$ et d'après le théorème de Rolle, A_n' s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]-1\,;1[$.

   Soit k élément de $\{1,\ldots,n-1\}$.

   Supposons que $\mathrm{A}_n^{(k)}$ s'annule en au moins k valeurs de $]-1\,;1[$. $\mathrm{A}_n^{(k)}$ s'annule de plus en 1 et -1 car $k \leqslant n-1$ et donc s'annule en $k+2$ valeurs au moins de l'intervalle $[-1\,;1]$.

   D'après le théorème de Rolle, $\mathrm{A}_n^{(k+1)}$ s'annule en au moins $k+1$ points de $]-1\,;1[$ (au moins une fois par intervalle ouvert).

   On a montré que $\forall\, k \in \{0,\ldots,n\}$, $\mathrm{A}_n^{(k)}$ s'annule en au moins k valeurs de $]-1\,;1[$.

En particulier, $A_n^{(n)} = L_n$ s'annule en au moins n réels deux à deux distincts de $]-1\,;1[$.

Puisque L_n est de degré n, on a trouvé toutes les racines de L_n, toutes réelles, simples et dans $]-1\,;1[$.

Exercice 24 : Montrer que pour tout réel strictement positif x, on a : $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$.

Correction : Montrons que $\left(\forall\, x > 0,\ \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}\right.$.

Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} &\iff x\ln(1+\frac{1}{x}) < 1 < (x+1)\ln(1+\frac{1}{x})\\
&\iff x(\ln(x+1)-\ln x) < 1 < (x+1)(\ln(x+1)-\ln x)\\
&\iff \frac{1}{x+1} < \ln(x+1)-\ln x < \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Soit x un réel strictement positif fixé.

Pour $t \in [x, x+1]$, posons $f(t) = \ln t$. f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$.

Donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel c dans $]x, x+1[$ tel que $f(x+1) - f(x) = (x+1-x)f'(c)$ ou encore

$$\exists c \in]x, x+1[/\ \ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c},$$

ce qui montre que $\forall\, x > 0,\ \dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x}$, et donc que

$$\forall\, x > 0,\ \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$