Dérivabilité

1. Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.

   Montrer que la composée d'une fonction dérivable f en a et d'une fonction dérivable g en $f(a)$ est une fonction dérivable en a et donner son nombre dérivé en a.

   Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathrm{I}$, $g : \mathrm{J} \longmapsto \mathbb{R}$ dérivable en $f(a) \in \mathrm{J} = f(\mathrm{I})$ et soit $x \in \mathrm{I} \setminus \{a\}$.

   Les fonctions f et g étant dérivables, elles admettent des développements limités d'ordre 1 respectivement
   En a **pour** f **:** $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x)$ avec $\varepsilon_1(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.
   En $\mathrm{A} = f(a)$ **pour g :** $g(x) = g(\mathrm{A}) + (x-\mathrm{A})g'(\mathrm{A}) + (x-\mathrm{A})\varepsilon_2(x)$ avec $\varepsilon_2(x) \xrightarrow[x\to \mathrm{A}]{} 0$.
   On pose de plus $\varepsilon_1(a) = \varepsilon_2(\mathrm{A}) = 0$ si bien que ε_1 et ε_2 sont continues respectivement en a et $\mathrm{A} = f(a)$.

   $$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g\Big(\underbrace{f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x)}_{\mathrm{X}_a}\Big)$$

   Comme $\lim\limits_{x\to a} \mathrm{X}_a = \mathrm{A}$,

   $$= g(\mathrm{A}) + (\mathrm{X}_a - \mathrm{A})g'(\mathrm{A}) + (\mathrm{X}_a - a)\varepsilon_2(\mathrm{X}_a).$$

   Or, $\mathrm{X}_a - \mathrm{A} = (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x) = (x-a)(f'(a) + \varepsilon_1(x))$,

   $$= (g\circ f)(a) + (x-a)f'(a)g'(\mathrm{A}) + (x-a)g'(\mathrm{A})\varepsilon_1(x) + (\mathrm{X}_a - a)\varepsilon_2(\mathrm{X}_a).$$
   $$= (g\circ f)(a) + (x-a)f'(a)g'(\mathrm{A}) + (x-a)\Big(\underbrace{g'(\mathrm{A})\varepsilon_1(x) + (f'(a)+\varepsilon_1(x))\varepsilon_2(\mathrm{X}_a)}_{\varepsilon_3(x)}\Big).$$

   Comme $\lim\limits_{x\to a} \mathrm{X}_a = \mathrm{A}$, par continuité de ε_2 en A, $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_2(\mathrm{X}_a) = 0$, puis $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_3(x) = 0$.

   Donc, $(g\circ f)(x) = (g\circ f)(a) + (x-a)f'(a)g'(f(a)) + (x-a)\varepsilon_3(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon_3(x) = 0$.

   Par conséquent, $g\circ f$ est dérivable en a et $(g\circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\ln(1+x)}$.

   Comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$, on a :

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} \times \frac{x}{\ln(1+x)} = 1.$$

Dérivabilité

3. Retrouver la fonction dérivée de la fonction $f : x \longmapsto \cos(x)$ et préciser son domaine de dérivabilité.

   Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque.

   Soit $f : x \longmapsto \cos(x)$.

   Alors, $$\begin{aligned}\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \cos(a)\underbrace{\frac{\cos(h)-1}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{}0} - \sin(a)\underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{}1} \\ &= -\sin(a).\end{aligned}$$

   Donc f est dérivable en a de nombre dérivée $f'(a) = -\sin(a)$. Elle l'est sur $\mathbb{R}$ tout entier et
   $$f' : x \longmapsto -\sin(x).$$

4. Étudier la dérivabilité de la fonction $g : x \longmapsto |x|^3$ sur son ensemble de définition.

   D'après les théorèmes sur les composées de fonctions dérivables, $x \longmapsto |x|^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

   De plus, en zéro :
   $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{|x|^3-|0|^3}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -\frac{x^3}{x} = 0 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^3}{x}.$$

   La fonction g est donc dérivable en 0 donc sur $\mathbb{R}$ tout entier.

5. Exceptionnellement sans préciser le domaine de dérivabilité, donner la dérivée factorisée et simplifiée des fonctions suivantes :

   (a) $\varphi : x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)-\cos(x)}$.

   (b) $\psi : x \longmapsto x^{\sqrt{x}}$.

   (a) $\varphi' : x \longmapsto -\dfrac{1}{(\sin(x)-\cos(x))^2}$.

   (b) $\psi' : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)+2}{\sqrt{x}}\, x^{\sqrt{x}}$.

Dérivabilité

Dérivabilité

1. Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$.

   Montrer que la composée d'une fonction dérivable f en a et d'une fonction dérivable g en $f(a)$ est une fonction dérivable en a et donner son nombre dérivé en a.

   Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathrm{I}$, $g : \mathrm{J} \longmapsto \mathbb{R}$ dérivable en $f(a) \in \mathrm{J} = f(\mathrm{I})$ et soit $x \in \mathrm{I} \setminus \{a\}$.

   Les fonctions f et g étant dérivables, elles admettent des développements limités d'ordre 1 respectivement
   En a **pour** f **:** $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x)$ avec $\varepsilon_1(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.
   En $\mathrm{A} = f(a)$ **pour g :** $g(x) = g(\mathrm{A}) + (x-\mathrm{A})g'(\mathrm{A}) + (x-\mathrm{A})\varepsilon_2(x)$ avec $\varepsilon_2(x) \xrightarrow[x \to \mathrm{A}]{} 0$.
   On pose de plus $\varepsilon_1(a) = \varepsilon_2(\mathrm{A}) = 0$ si bien que ε_1 et ε_2 sont continues respectivement en a et $\mathrm{A} = f(a)$.

   $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\Big(\underbrace{f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x)}_{\mathrm{X}_a}\Big)$$

   Comme $\lim\limits_{x \to a} \mathrm{X}_a = \mathrm{A}$,

   $$= g(\mathrm{A}) + (\mathrm{X}_a - \mathrm{A})g'(\mathrm{A}) + (\mathrm{X}_a - a)\varepsilon_2(\mathrm{X}_a).$$

   Or, $\mathrm{X}_a - \mathrm{A} = (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x) = (x-a)(f'(a) + \varepsilon_1(x))$,

   $$\begin{aligned} &= (g \circ f)(a) + (x-a)f'(a)g'(\mathrm{A}) + (x-a)g'(\mathrm{A})\varepsilon_1(x) + (\mathrm{X}_a - a)\varepsilon_2(\mathrm{X}_a). \\ &= (g \circ f)(a) + (x-a)f'(a)g'(\mathrm{A}) + (x-a)\Big(\underbrace{g'(\mathrm{A})\varepsilon_1(x) + (f'(a) + \varepsilon_1(x))\varepsilon_2(\mathrm{X}_a)}_{\varepsilon_3(x)}\Big). \end{aligned}$$

   Comme $\lim\limits_{x \to a} \mathrm{X}_a = \mathrm{A}$, par continuité de ε_2 en A, $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_2\left(\mathrm{X}_a\right) = 0$, puis $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_3\left(x\right) = 0$.

   Donc, $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(a) + (x-a)f'(a)g'(f(a)) + (x-a)\varepsilon_3(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon_3(x) = 0$.

   Par conséquent, $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.

2. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

   Tant que l'on ne connaît pas encore les développements limités, cette limite est un peu sophistiquée. On effectue un changement de variable pour se ramener à une limite connue en posant $\theta = \arccos(x)$ *i.e.* $x = \cos(\theta)$ et on a :

   $$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \theta(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \arccos(x) = 0^+ \implies \lim_{x \to 1} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}} \underset{\substack{\uparrow \\ \sin(x) > 0}}{=} \lim_{\substack{\theta \to 0 \\ \theta > 0}} \frac{\theta}{\sin(\theta)} = 1.$$

Dérivabilité

3. Retrouver la fonction dérivée de la fonction $f : x \longmapsto \exp(x)$ et préciser son domaine de dérivabilité.

   Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque.

   Soit $f : x \longmapsto \exp(x)$.

   Alors, $$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\exp(a+h)-\exp(a)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \exp(a)\underbrace{\frac{\exp(h)-1}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{}1} = \exp(a).$$

   Donc f est dérivable en a de nombre dérivée $f'(a) = \exp(a)$. Elle l'est sur $\mathbb{R}$ tout entier et
   $$f' : x \longmapsto \exp(x).$$

4. Étudier la dérivabilité de la fonction $g : x \longmapsto |\sin(x)|$ sur son ensemble de définition.

   D'après les théorèmes sur les composées de fonctions dérivables, $x \longmapsto |\sin(x)|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

   De plus, en zéro :
   $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{|\sin(x)|-|\sin(0)|}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -\frac{\sin(x)}{x} = -1 \neq 1 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin(x)}{x}.$$

   Elle n'est donc pas dérivable en 0.

5. Exceptionnellement sans préciser le domaine de dérivabilité, donner la dérivée simplifiée et factorisée des fonctions suivantes :

   (a) $\varphi : x \longmapsto \ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

   (b) $\psi : x \longmapsto x^{x^2}$.

   (a) $\varphi' : x \longmapsto \frac{1}{x^2}\tan\left(\frac{1}{x}\right)$.

   (b) $\psi' : x \longmapsto x\,(2\ln(x)+1)\,x^{x^2}$.

Dérivabilité