Fichiers Suites a, b et c

Exercices faciles :

Exercice 1 : Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, alors $(u+v)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Correction : Supposons que $u+v$ converge. Alors, $(u+v)-u$ converge : absurde !

Exercice 2 : $\forall\, k, n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{k}{n} + \dfrac{1}{k}$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Correction : On prend $k = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$.
On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{k}{n} + \dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{\sqrt{n}+1}{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
Or le membre de droite tend vers 0. On conclut par encadrement.

Exercice 3 : Montrer que $u_n = n^3$ diverge vers l'infini.

Correction : Soit $A \in \mathbb{R}$.

- Si $A \geqslant 1$ alors $A^3 \geqslant A$. On peut donc poser $n_0 = A$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies n^3 \geqslant n_0^3 \geqslant A^3 \geqslant A$.
- Si $A \leqslant 1$, il suffit de poser $n_0 = 1$ et on a $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies n^3 \geqslant 1 \geqslant A$.

Exercice 4 :

1. Trouver une suite non bornée qui ne tende ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$.
2. Trouver une suite positive qui converge vers 0, mais non décroissante, même pour n très grand.
3. Trouver une suite divergente telle que $\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, (u_{np})_n$ converge.

Correction :

1. $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée mais ne diverge ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$.
2. $\left(\dfrac{1}{n+(-1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, mais non décroissante, même pour n très grand.
3. Posons $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est premier} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

   Pour $n \geqslant 2$, $\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, u_{np} = 0$ donc $(u_{np})_n$ converge. Pourtant, l'ensemble des nombres premiers étant infini, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet aussi une suite extraite convergeant vers 1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien divergente.

Exercice 5 : Montrer que si (u_n) converge vers ℓ alors $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$.

Correction : $0 \leqslant ||u_n| - |\ell|| \leqslant |u_n - \ell|$ donc $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$ par encadrement.

Exercice 6 : Montrer qu'une suite d'entiers qui converge est constante à partir d'un certain rang.

Correction : Soit (u_n) une suite d'entiers qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Dans l'intervalle $\mathrm{I} = \left]\ell - \frac{1}{2}\,; \ell + \frac{1}{2}\right[$ de longueur 1, il existe au plus un élément de $\mathbb{N}$. Donc $\mathrm{I} \cap \mathbb{N}$ est soit vide soit un singleton $\{a\}$.

La convergence de (u_n) s'écrit :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad (n \geqslant \mathrm{N} \Rightarrow |u_n - \ell| < \epsilon).$$

Fixons $\epsilon = \frac{1}{2}$, nous obtenons un N correspondant. Et pour $n \geqslant \mathrm{N}$, $u_n \in \mathrm{I}$.

Or, u_n est un entier, donc

$$n \geqslant \mathrm{N} \Rightarrow u_n \in \mathrm{I} \cap \mathbb{N}.$$

En conséquent, $\mathrm{I} \cap \mathbb{N}$ n'est pas vide (par exemple u_{N} en est un élément) donc $\mathrm{I} \cap \mathbb{N} = \{a\}$.

L'implication précédente s'écrit maintenant :

$$n \geqslant \mathrm{N} \Rightarrow u_n = a.$$

Donc la suite (u_n) est stationnaire (au moins) à partir de N. En prime, elle est bien évidemment convergente vers $\ell = a \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 : Nature de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

Correction : $\forall\, k \in [\![1, n^2]\!]$, $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ donc $\dfrac{n}{\sqrt{2}} \leqslant u_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 8 : Nature de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

Correction : $\forall\, k \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n^2}}$ donc $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant u_n \leqslant 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ par encadrement.

Exercice 9 : Nature de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k}$.

Correction : $\forall\, k \in [\![1, 2n+1]\!]$, $\dfrac{n}{n^2+2n+1} \leqslant \dfrac{n}{n^2+k} \leqslant \dfrac{n}{n^2}$ donc $\dfrac{n(2n+1)}{(n+1)^2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2n+1}{n}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$ par encadrement.

Exercice 10 : Nature de la suite de terme général $u_n = n - \sqrt{n^2+(-1)^n}$.

Correction : $u_n = n - \sqrt{n^2+(-1)^n} = \dfrac{-(-1)^n}{n+\sqrt{n^2+(-1)^n}}$ d'où $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n} \dfrac{1}{1+\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n^2}}}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 11 : Nature de la suite de terme général $u_n = \dfrac{\sin n^2}{n}$ et $v_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sin n}$.

Correction :

- $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n^2}{n} = 0$;
- De même, $\dfrac{1}{v_n}$ tend vers 0. Par conséquent, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Nature de la suite de terme général $u_n = \dfrac{\sin 1 + \sin 2 + \cdots + \sin n}{n}$.

Correction : $u_n = \dfrac{\sin 1 + \sin 2 + \cdots + \sin n}{n} = \dfrac{1}{n}\mathrm{Im}\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(e^i)^k\right] = \dfrac{1}{n}\mathrm{Im}\left[e^i\dfrac{(e^i)^n - 1}{e^i - 1}\right] = \dfrac{\sin\frac{n}{2}\sin\frac{n+1}{2}}{n\sin\frac{1}{2}}$.

On a donc $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n\sin\frac{1}{2}}$ et par conséquent $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. (La réciproque de Césàro est fausse).

Exercice 2 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k-1)}}$.

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et encadrer sa limite.

Exercice 3 : Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{e^k}$.

En introduisant la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{-kx}$, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Correction : Si $x \neq 0$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{-kx} = \sum_{k=1}^{n}(e^{-x})^k = \frac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}}$.

D'où , en dérivant : $\forall\, x \neq 0, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} -ke^{-kx} = \frac{(1-n)e^{-(n+1)x} + ne^{-nx} - e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$.

et donc en $x = 1$, on obtient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{e^k} = \frac{(n-1)e^{-(n+1)} - ne^{-n} + e^{-1}}{(1-e^{-1})^2}$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{e^{-1}}{(1-e^{-1})^2}$ ou encore $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{e^k} = \frac{e}{(e-1)^2}}$.

Exercice 4 : Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

En déduire la limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Correction : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

Par conséquent, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant 2\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ par comparaison.

Exercice 5 : $u_0, v_0 \in \mathbb{R}_+^*$, et $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \dfrac{2u_nv_n}{u_n + v_n}$.

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite qu'on déterminera.

Indication : commencer par montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant v_n$.

Correction : Par récurrence immédiate, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $v_n > 0$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} - \dfrac{2u_nv_n}{u_n + v_n} = \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \geqslant 0$. d'où $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant v_n$.

Par conséquent :

- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2} \geqslant 0$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît.
- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - v_n = \dfrac{(u_n - v_n)v_n}{u_n + v_n} \leqslant 0$: $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît.

On a donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante et majorée, elle converge vers a.

De même $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, v_n \geqslant u_n \geqslant u_0$: la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée, elle converge vers b.

On a $a = \dfrac{a+b}{2}$ et $b = \dfrac{2ab}{a+b}$ soit $a = b$.

On peut remarquer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n v_n = u_0 v_0$.

Par conséquent, en passant à la limite, $a^2 = u_0 v_0$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \sqrt{u_0 v_0}}$.

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Soient $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $u_n = \dfrac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \mathrm{S}_n - 2\sqrt{n}$.

1. Montrer : $\mathrm{S}_n \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$;
2. Montrer : $2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant \mathrm{S}_n$;
3. En déduire que (u_n) et (v_n) convergent.

Correction :

1. Par récurrence :

   - Vrai au rang $n = 1$.
   - Supposons que $\mathrm{S}_n \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$. Montrons qu'alors $\mathrm{S}_{n+1} \leqslant \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.

     Or $\mathrm{S}_{n+1} = \mathrm{S}_n + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n-1} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n} + \dfrac{\sqrt{n^2-1}+1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n} + \dfrac{n+1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.

   CQFD.

2. Par récurrence :

   - Vrai au rang $n = 1$.
   - Supposons que $2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant \mathrm{S}_n$. Montrons qu'alors $2\sqrt{n+2} - 2 \leqslant \mathrm{S}_{n+1}$.

     Or $\mathrm{S}_{n+1} = \mathrm{S}_n + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant 2\sqrt{n+1} - 2 + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{2n+3}{\sqrt{n+1}} - 2$.

     On aura donc $2\sqrt{n+2} - 2 \leqslant \mathrm{S}_{n+1}$ si $\dfrac{2n+3}{\sqrt{n+1}} - 2 \geqslant 2\sqrt{n+2} - 2$.

     Or $\dfrac{2n+3}{\sqrt{n+1}} \geqslant 2\sqrt{n+2} \iff 2n+3 \geqslant 2\sqrt{(n+2)(n+1)} \iff 4n^2 + 12n + 9 \geqslant 4n^2 + 12n + 8$.
     D'où $2\sqrt{n+2} - 2 \leqslant \mathrm{S}_{n+1}$.

   CQFD.

3.
   - On a donc $2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$ et alors $2\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant 1 + \sqrt{1+\dfrac{1}{n}}$.

     Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ ou encore $\mathrm{S}_n \sim 2\sqrt{n}$.
   - $v_{n+1} - v_n = \mathrm{S}_{n+1} - \mathrm{S}_n - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leqslant 0$.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

Or elle est également minorée : $v_n = S_n - 2\sqrt{n} \leqslant 2\sqrt{n+1} - 2 - 2\sqrt{n} \leqslant -2$. Elle est donc convergente.

Exercice 2 : Soient $u, v \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

Correction : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n v_n \leqslant u_n \leqslant 1$. Donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. Idem pour v_n.

Exercice 3 :

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} \\ \sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} \end{cases}$ (n radicaux).

   En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} = \pi$.

Correction : Par récurrence :

– $\begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2} \\ \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2} \end{cases}$. Les formules sont vraies au rang 1.

– Supposons qu'il existe $n \geqslant 1$ tel que $\begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} \\ \sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} \end{cases}$ (n radicaux).

  On a alors :

$$\cos^2\frac{\pi}{2^{n+2}} = \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}\right) = \frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}\right)$$

  Or $\cos\dfrac{\pi}{2^{n+2}} \geqslant 0$ donc $\cos\dfrac{\pi}{2^{n+2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$ ($n+1$ radicaux).

  De même,

$$\sin^2\frac{\pi}{2^{n+2}} = \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}\right) = \frac{1}{4}\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}\right)$$

  Or $\sin\dfrac{\pi}{2^{n+2}} \geqslant 0$ donc $\sin\dfrac{\pi}{2^{n+2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$ ($n+1$ radicaux).

  La propriété est donc héréditaire.

On a $\dfrac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ d'où $\dfrac{2^{n+1}}{\pi} \times \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} = \pi.}$$

Exercice 4 : Soit (u_n) une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \sup_{p \geqslant n} u_p$ et $w_n = \inf_{p \geqslant n} u_p$.

Étudier les monotonies des suites (v_n) et (w_n). Que peut-on en déduire ?

Correction : L'ensemble $\{u_p, p \geqslant n+1\}$ est inclus dans $\{u_p, p \geqslant n\}$. D'autre part, ces deux ensembles sont bornés et non vides. Ils admettent tous deux des bornes supérieures et inférieures.

Par conséquent, $\sup\{u_p, p \geqslant n+1\} \leqslant \sup\{u_p, p \geqslant n\}$ et $\inf\{u_p, p \geqslant n+1\} \geqslant \inf\{u_p, p \geqslant n\}$.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Ces suites étant bornées, elles sont convergentes.