Fichiers Fonctions-Limites a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x$
2. $\lim\limits_{x\to1} \frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}$

Exercice 2 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$
2. $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x}}$

Exercice 3 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\sqrt{1+x^2}-x)$
2. $\lim\limits_{x\to4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

Exercice 4 : Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x}.\sin\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Exercice 5 : Déterminer $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

Exercice 6 : Déterminer $\lim\limits_{x\to0} \frac{x\sin x}{1-\cos x}$.

Exercice 7 : Déterminer $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x-\sin 2x}{x^2}$.

Exercice 8 : Déterminer $\lim\limits_{x\to0} x\frac{\tan x}{\cos^2 x-1}$.

Exercice 9 : Montrer que si une fonction f définie sur $\mathrm{E}\subset\mathbb{R}$ est continue en x_0 alors la fonction $|f|$ est, elle aussi, continue en x_0.

Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 10 : Déterminer $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

Exercice 11 : Déterminer $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2}-1)$.

Exercice 12 : Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$
2. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$

Exercice 13 : Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+2\,|x|}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to1} \frac{x-1}{x^n-1}$

Exercice 14 : Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^2+2\,|x|}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^2-4}{x^2-3\,x+2}$

Exercice 15 : Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$

2. $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 dans son intérieur. On suppose que $\lim_{x \to x_0} f(x) = u > 0$.

Démontrer qu'il existe $t > 0$ tel que si $0 < |x - x_0| < t$ alors $|f(x)| \geqslant \frac{u}{2}$.

Exercice 2 : Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+ \; g(x) > 0 \text{ et } \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \mathrm{L} \neq 0.$$

Montrer que $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$.

Exercice 3 : Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+ \; g(x) > 0 \text{ et } \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \mathrm{L} \neq 0.$$

Montrer que si $\mathrm{L} > 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$.

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 :

1. Montrer que pour tout $0 < \epsilon < 1$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|x-1| < \frac{\epsilon}{4} \implies |x^2 + x - 2| < \epsilon.$$

2. En déduire :

$$\lim_{x \to 1} x^2 + x - 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1} (x^2 + x - 2)\cos x.$$