Fichiers Fonctions-Derivabilite a, b et c

Exercices faciles :

Exercice 1 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto (x^3+x-2)^4$
2. $x \longmapsto \tan^3 x$

Exercice 2 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto (1+x)\sqrt{1+x}$
2. $x \longmapsto \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

Exercice 3 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$
2. $x \longmapsto \pi^{x^2-1}$

Exercice 4 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto x^2\sqrt{x}$
2. $x \longmapsto \sqrt{\sin\left(\dfrac{1}{2+x^2}\right)}$

Exercice 5 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$
2. $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$

Exercice 6 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto \dfrac{(x+1)^3}{\sqrt{x}}$
2. $x \longmapsto x^{x^x}$

Exercice 7 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto \dfrac{2x^3-1}{x\sqrt{1+x^2}}$
2. $x \longmapsto (1+x^4)^{1-2x}$

Exercice 8 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto \dfrac{1}{(e^x+e^{-x})^2}$
2. $x \longmapsto \ln\sqrt{1+x^2}$

Exercice 9 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto \dfrac{(\ln x)^4}{x}$
2. $x \longmapsto x^{x^2}$

Exercice 10 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1. $x \longmapsto \dfrac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2-1}$
2. $x \longmapsto x^x$

Exercice 11 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1 $x \longmapsto \dfrac{3\pi}{\tan(5x)}$

2 $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$

Exercice 12 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1 $x \longmapsto \dfrac{5}{\sqrt{x^2+x+1}}$

2 $x \longmapsto \sqrt{x^2+6x-1}$

Exercice 13 : Dériver, sans se soucier du domaine de dérivabilité.

1 $x \longmapsto \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$

2 $x \longmapsto \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

Exercice 14 : Soit $f : x \longmapsto 2\sin(3x) - 5\cos(3x)$.

Déterminer deux réels a et b tels que $f'' + af' + bf = 0$.

Exercice 15 : Soit $g : x \longmapsto \sin^2 x$.

Déterminer une relation entre f'' et f.

Exercice de difficulté moyenne :

Exercice 1 : Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & & e^x \cos x \end{array}$.

Exercice 2 : Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de $f : x \longmapsto x^2(1+x)^n$.

Exercice 3 : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}, \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant n!$.

Exercice 4 : Pour $n \geqslant 1$ et $x \neq 0$, on pose $f_n(x) = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$.

Montrer que $\forall\, x \neq 0, \quad f_n^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 5 : Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de $f : x \longmapsto xe^{2x}$.

Exercice 6 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{x\sqrt{3}}\sin(x)$.

Montrer que $f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{6}\right)$.

Exercice 7 : Soit $f : x \longmapsto x + \sin^2(x)$.

Étudier la fonction f. Préciser les points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 8 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$.

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.

Correction : $\phi : x \longmapsto [f'x) + f(x)]\, e^{-x}$.

Exercice 9 : Soient f, g continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $\forall\, x \in]a,b[$, $g'(x) \neq 0$.

1 Montrer que $g(b) - g(a) \neq 0$.

2 Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Correction :

1. Supposons que $g(b) = g(a)$. Comme la fonction g est continue sur $[a, b]$, et dérivable sur $]a, b[$, d'après le théorème de Rolle, il existerait un réel $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. C'est absurde. Par conséquent, $g(b) - g(a) \neq 0$.

2. Posons $\lambda = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ et $\phi : x \longmapsto f(x) - \lambda g(x)$.

   g est continue sur $[a, b]$, et dérivable sur $]a, b[$.

   $\phi(a) = f(a) - \lambda g(a) = f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(a) = \dfrac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)}$.

   $\phi(b) = f(b) - \lambda g(b) = f(b) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(b) = \dfrac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)}$.

   Comme $\phi(a) = \phi(b)$, on peut appliquer le théorème de Rolle à ϕ sur $[a, b]$: il existe $c \in]a, b[$ tel que $\phi'(c) = 0$.

   On a alors $f'(c) - \lambda g'(c)$, et, sachant que $g'(c) \neq 0$, on déduit $\lambda = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, i.e. $\boxed{\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}}$.

Exercice 10 : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{D}^n$ sur $[a, b]$.

On suppose que $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ et que $f(b) = 0$.

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 11 : $a < b$. f est une fonction continue sur $[a, b]$, ne s'annulant pas sur $[a, b]$ et étant dérivable sur $]a, b[$.

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}$.

Exercice 12 : Soit f une fonction dérivable vérifiant $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \ell > 0$.

Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 13 :

1. Montrer que $\forall\, x > 0, \quad \dfrac{1}{1+x} < \ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x}$.
2. En déduire pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ la limite de $\left(\displaystyle\sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} \right)_{n \geqslant 1}$.

Exercice 14 : On considère deux réels a et b tels que $0 \leqslant a < b$.

Montrer que $\dfrac{b-a}{1+b^2} \leqslant \arctan(b) - \arctan(a) \leqslant \dfrac{b-a}{1+a^2}$.

Exercice 15 : Dans l'application du théorème des accroissements finis à la fonction

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

sur l'intervalle $[a, b]$ préciser le nombre « c » de $]a, b[$.

Donner une interprétation géométrique.

Correction : La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $[a, b]$.

Le théorème des accroissement finis assure l'existence d'un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Mais pour la fonction particulière de cet exercice nous pouvons expliciter ce c.

En effet $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ implique $\alpha(b^2 - a^2) + \beta(b-a) = (2\alpha c + \beta)(b-a)$.

Donc $c = \dfrac{a+b}{2}$.

Géométriquement, le graphe $\mathcal{P}$ de f est une parabole.

Si l'on prend deux points $\mathrm{A} = (a, f(a))$ et $\mathrm{B} = (b, f(b))$ appartenant à cette parabole, alors la droite (AB) est parallèle à la tangente en $\mathcal{P}$ qui passe en $\mathrm{M} = (\dfrac{a+b}{2}, f(\dfrac{a+b}{2}))$.

L'abscisse de M étant le milieu des abscisses de A et B.

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice 1 : Soit $a > 0$ et $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = f(a) = 0$ et $f'(0) = 0$.

1. Montrer que la dérivée de $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ s'annule sur $]0, a[$.
2. En déduire qu'il existe un point autre que l'origine en lequel la tangente à f passe par l'origine.

Exercice 2 : Étudier la dérivabilité de $\phi : x \longmapsto (x - \lfloor x \rfloor)(x - \lfloor x \rfloor - 1)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Étudier la dérivabilité de la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x \sqrt{x}$ sur son ensemble de définition.

Exercice 4 : Soit $a > 0$ et $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = f(a) = 0$ et $f'(0) = 0$.

1. Montrer que : $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0. Définir son prolongement ϕ.
2. Montrer que ϕ est dérivable sur $]0, a[$ et que sa dérivée s'annule sur cet intervalle.
3. En déduire qu'il existe un point autre que l'origine en lequel la tangente à f passe par l'origine.

Correction :

1. $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est continue sur $]0, a]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

   D'autre part, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} f'(0) = 0$ par définition du nombre dérivé de f en 0.

   $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ admet donc une limite finie en 0. Elle peut donc être prolongée par continuité.

   Son prolongement ϕ est défini par $\phi(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ si $x \in]0, a]$ et $\phi(0) = 0$.

2. Sur $]0, a[$, ϕ est dérivable comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

   De plus, on a ϕ continue sur $[0, a]$, ϕ dérivable sur $]0, a[$ et $\phi(0) = \phi(a) = 0$.

   D'après le théorème de Rolle, il existe un réel $c \in]0, a[$ tel que $\phi'(c) = 0$.

3. En c, on a $\phi'(c) = \dfrac{cf'(c) - f(c)}{c^2} = 0$, donc $cf'(c) - f(c) = 0$.

   La tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse c a pour équation : $y = f'(c)x - f'(c)c + f(c)$. Comme $cf'(c) - f(c) = 0$, on a $\mathcal{T} : y = f'(c)x$.

   En d'autres termes, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse c passe par l'origine.

Exercice 5 (Polynômes de Legendre) : Pour n entier naturel non nul donné, on pose $\mathrm{L}_n = ((\mathrm{X}^2 - 1)^n)^{(n)}$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n.

2 En étudiant le polynôme $A_n = (X^2-1)^n$, montrer que L_n admet n racines réelles simples et toutes dans $]-1;1[$.

Correction :

1 $(X^2-1)^n$ est de degré $2n$ et donc, L_n est de degré $2n-n=n$. Puis, dom$(L_n) = $ dom$((X^{2n})^{(n)}) = \dfrac{(2n)!}{n!}$.

2 1 et -1 sont racines d'ordre n de A_n et donc racines d'ordre $n-k$ de $A_n^{(k)}$, pour tout k élément de $\{0,\dots,n\}$.

Montrons par récurrence sur k que $\forall\, k\in\{0,\dots,n\}$, $A_n^{(k)}$ s'annule en au moins k valeurs deux à deux distinctes de l'intervalle $]-1,1[$.

Pour $k=1$, A_n est continu sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$. De plus, $A_n(0)=A_n(1)=0$ et d'après le théorème de Rolle, A_n' s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]-1,1[$.

Soit k élément de $\{1,\dots,n-1\}$. Supposons que $A_n^{(k)}$ s'annule en au moins k valeurs de $]-1,1[$. $A_n^{(k)}$ s'annule de plus en 1 et -1 car $k\leqslant n-1$ et donc s'annule en $k+2$ valeurs au moins de l'intervalle $[-1,1]$. D'après le théorème de Rolle, $A_n^{(k+1)}$ s'annule en au moins $k+1$ points de $]-1,1[$ (au moins une fois par intervalle ouvert).

On a montré que $\forall\, k\in\{0,\dots,n\}$, $A_n^{(k)}$ s'annule en au moins k valeurs de $]-1,1[$. En particulier, $A_n^{(n)}=L_n$ s'annule en au moins n réels deux à deux distincts de $]-1,1[$. Puisque L_n est de degré n, on a trouvé toutes les racines de L_n, toutes réelles, simples et dans $]-1,1[$.

Exercice 6 : Montrer que le polynôme X^n+aX+b, (a et b réels) admet au plus trois racines réelles.

Correction : Par l'absurde on suppose qu'il y a (au moins) quatre racines distinctes pour $P_n(X)=X^n+aX+b$. Notons les $x_1<x_2<x_3<x_4$.

Par le théorème de Rolle appliqué trois fois (entre x_1 et x_2, entre x_2 et x_3...) il existe $x_1'<x_2'<x_3'$ des racines de P_n'.

On applique deux fois le théorème Rolle entre x_1' et x_2' et entre x_2' et x_3'.

On obtient deux racines distinctes pour P_n''.

Or, $P_n''=n(n-1)X^{n-2}$ ne peut avoir que 0 comme racines.

Donc nous avons obtenu une contradiction.

Exercice 7 : Soit $f\in C^2([a,b],\mathbb{R})\cap D^3(]a,b[,\mathbb{R})$.

1 Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{2}(f'(a)+f'(b))-f^{(3)}(c).$$

Indication : Appliquer le théorème de Rolle *à g' puis g où* $g(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{x-a}{2}(f'(x)+f'(a))-A(x-a)^3$ *où A est intelligemment choisi.*

2 Que devient cette formule si on remplace f par F une primitive d'une fonction f de classe C^1 sur $[a,b]$ et deux fois dérivable sur $]a,b[$? Interprétez géométriquement.

Correction :

1 Pour $x \in [a,b]$, posons $g(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{x-a}{2}(f'(x)+f'(a)) - \mathrm{A}(x-a)^3$ où A est choisi de sorte que $g(b) = g(a) = 0$ (c'est-à-dire $\mathrm{A} = \dfrac{1}{(b-a)^3}(f(b) - f(a) - \dfrac{b-a}{2}(f'(b)+f'(a)))$.

$f \in \mathrm{C}^2([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathrm{D}^3(]a,b[,\mathbb{R})$ et donc $g \in \mathrm{C}^1([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathrm{D}^2(]a,b[,\mathbb{R})$.

Pour $x \in [a,b]$, on a :

$$g'(x) = f'(x) - \frac{1}{2}(f'(x)+f'(a)) - \frac{x-a}{2}f''(x) - 3\mathrm{A}(x-a)^2,$$

puis

$$g''(x) = \frac{1}{2}f''(x) - \frac{1}{2}f''(x) - \frac{x-a}{2}f^{(3)}(x) - 6\mathrm{A}(x-a) = \frac{x-a}{2}(-12\mathrm{A} - f^{(3)}(x)).$$

g est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifie de plus $g(a) = g(b)$.

Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $d \in]a,b[$ tel que $g'(d) = 0$. De même, g' est continue sur $[a,d] \subset [a,b]$, dérivable sur $]a,d[(\neq \varnothing)$ et vérifie de plus $g'(a) = g'(d) (= 0)$.

D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,d[\subset]a,b[$ tel que $g''(c) = 0$ ou encore tel que $\mathrm{A} = -\dfrac{1}{12}f^{(3)}(c)$ (puisque $c \neq a$).

En écrivant explicitement l'égalité $g(b) = 0$, on a montré que :

$$\exists c \in]a,b[/\ f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}(f'(b)+f'(a)) - \frac{1}{12}f^{(3)}(c)(b-a)^3.$$

2 Si $f \in \mathrm{C}^1([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathrm{D}^2(]a,b[,\mathbb{R})$ et si F est une primitive de f sur $[a,b]$, la formule précédente s'écrit :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \frac{b-a}{2}(\mathrm{F}'(b)+\mathrm{F}'(a)) - \frac{1}{12}\mathrm{F}^{(3)}(c)(b-a)^3 = \frac{b-a}{2}(f(b)+f(a)) - \frac{1}{12}f''(c)(b-a)^3.$$

Donc, si $f \in \mathrm{C}^1([a,b],\mathbb{R}) \cap \mathrm{D}^2(]a,b[,\mathbb{R})$,

$$\exists c \in]a,b[/\ \int_a^b f(t)\,dt = \frac{b-a}{2}(f(b)+f(a)) - \frac{1}{12}f''(c)(b-a)^3.$$

Interprétation géométrique :

Si f est positive, $\mathrm{A}_1 = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est l'aire du domaine $\mathrm{D} = \{\mathrm{M}(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ a \leqslant x \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ et $\mathrm{A}_2 = \dfrac{b-a}{2}(f(b)+f(a))$ est l'aire du trapèze $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ f(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$.

Si $\mathrm{M}_2 = \sup\{|f''(x)|,\ x \in [a,b]\}$ existe dans $\mathbb{R}$, on a :

$$|\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2| \leqslant \mathrm{M}_2\frac{(b-a)^3}{12}.$$

Exercice 8 : Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = f(a) = f'(0) = 0$ pour un certain a non nul.

Montrer qu'il existe un point distinct de O de la courbe représentative de f en lequel la tangente passe par l'origine.

Correction : Soit x_0 un réel non nul. Une équation de la tangente (T_{x_0}) à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$. (T_{x_0}) passe par l'origine si et seulement si

$$x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0.$$

Pour x réel, on pose $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ (g est « la fonction pente à l'origine »).

Puisque f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, g est déjà continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Puisque f est dérivable en 0 et que $f(0) = f'(0) = 0$, g est de plus continue en 0.

Finalement, g est continue sur $[0, a]$, dérivable sur $]0, a[$ et vérifie $g(0) = g(a)(= 0)$.

D'après le théorème de Rolle, il existe un réel x_0 dans $]0, a[$ tel que $g'(x_0) = 0$.

Puisque x_0 n'est pas nul, on a $g'(x_0) = \dfrac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2}$. L'égalité $g'(x_0) = 0$ s'écrit $x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$ et, d'après le début de l'exercice, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 passe par l'origine.

Exercice 9 : Soient x et y réels avec $0 < x < y$.

1. Montrer que
$$x < \frac{y - x}{\ln y - \ln x} < y.$$

2. On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par
$$\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y) - \alpha \ln x - (1 - \alpha) \ln y.$$
De l'étude de f déduire que pour tout α de $]0, 1[$,
$$\alpha \ln x + (1 - \alpha) \ln y < \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y).$$
Interprétation géométrique ?

Correction :

1. Soit $g(t) = \ln t$. Appliquons le théorème des accroissements finis sur $[x, y]$.

   Il existe $c \in]x, y[$, $g(y) - g(x) = g'(c)(y - x)$. Soit $\ln y - \ln x = \dfrac{1}{c}(y - x)$.

   Donc $\dfrac{\ln y - \ln x}{y - x} = \dfrac{1}{c}$.

   Or, $x < c < y$ donc $\dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{x}$. Ce qui donne les inégalités recherchées.

2. $f'(\alpha) = \dfrac{x - y}{\alpha x + (1 - \alpha)y} - \ln x + \ln y$.

   Et $f''(\alpha) = -\dfrac{(x - y)^2}{(\alpha x + (1 - \alpha)y)^2}$.

   Comme f'' est négative alors f' est décroissante sur $[0, 1]$.

   Or, $f'(0) = \dfrac{x - y - y(\ln x - \ln y)}{y} > 0$ d'après la première question et de même $f'(1) < 0$.

   Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [x, y]$ tel que $f'(c) = 0$.

   Maintenant f' est positive sur $[0, c]$ et négative sur $[c, 1]$.

   Donc f est croissante sur $[0, c]$ et décroissante sur $[c, 1]$.

   Or, $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$ donc pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \geqslant 0$.

   Cela prouve l'inégalité demandée.

3 Géométriquement nous avons prouvé que la fonction ln est concave, c'est-à-dire que la corde (le segment qui va de $(x, f(x))$ à $(y, f(y))$ est sous la courbe d'équation $y = f(x)$.

Exercice 10 : Par application du théorème des accroissements finis à $f(x) = \ln x$ sur $[n, n+1]$ montrer que

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Correction : Le théorème des accroissements finis donne :

$\ln(n+1) - \ln(n) = \frac{1}{c_n}(n+1-n) = \frac{1}{c_n}$, avec $c_n \in [n, n+1]$.

Or, $c_n \geqslant n$ donc $\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{c_n}$.

Donc :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k} = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1).$$

La dernière égalité s'obtient car la somme est télescopique et $\ln 1 = 0$.

Donc $\mathrm{S}_n \geqslant \ln(n+1)$, donc $\mathrm{S}_n \to +\infty$.

Exercice 11 : Montrer que pour tout réel strictement positif x, on a : $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$.

Correction : Montrons que $(\forall x > 0,\ \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} &\Leftrightarrow x\ln(1+\frac{1}{x}) < 1 < (x+1)\ln(1+\frac{1}{x})\\ &\Leftrightarrow x(\ln(x+1) - \ln x) < 1 < (x+1)(\ln(x+1) - \ln x)\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Soit x un réel strictement positif fixé. Pour $t \in [x, x+1]$, posons $f(t) = \ln t$. f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$.

Donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel c dans $]x, x+1[$ tel que $f(x+1) - f(x) = (x+1-x)f'(c)$ ou encore

$$\exists c \in]x, x+1[/\ \ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c},$$

ce qui montre que $\forall x > 0,\ \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$, et donc que

$$\forall x > 0,\ \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

Exercice 12 (Généralisation du théorème des accroissements finis) : Soient f et g deux applications continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.

On définit $\forall x \in [a, b]$, $\quad \Delta(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ g(a) & g(b) & g(x) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

1. Montrer que Δ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $\forall\, x \in]a,b[,\quad \Delta'(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(x) \\ g(a) & g(b) & g'(x) \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

2. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $[g(a)-g(b)]\, f'(c) = [f(a)-f(b)]\, g'(c)$.

Correction : En pensant à l'expression développée de Δ, on voit que Δ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifie $\Delta(a) = \Delta(b) (= 0)$ (un déterminant ayant deux colonnes identiques est nul).

Donc, d'après le théorème de Rolle, $\exists c \in]a,b[/ \ \Delta'(c) = 0$.

Mais, pour $x \in]a,b[$, $\Delta'(x) = f'(x)(g(a)-g(b)) - g'(x)(f(a)-f(b))$ (dérivée d'un déterminant).

L'égalité $\Delta'(c) = 0$ s'écrit : $f'(c)(g(b)-g(a)) = g'(c)(f(b)-f(a))$ ce qu'il fallait démontrer.

Remarque : Ce résultat généralise le théorème des accroissements finis ($g = \mathrm{I}d$ « est » le théorème des accroissements finis.)