Chapitre

XVIII Systèmes linéaires

Avant de rentrer dans le vif du sujet en algèbre linéaire, un chapitre plus orienté calcul. Il s'agit voir le lien entre les matrices et les systèmes d'équations linéaires, pour lesquels nous verrons une méthode de résolution systématique.

CONTENU

I/ Systèmes linéaires et matrices

I.1 Écriture matricielle d'un système linéaire

Définition 1 (Système linéaire) : On appelle système linéaire à m équations et n inconnues x_1, x_2, ...x_n tout système $(\mathcal{S})$ de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \dots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}\right. \qquad (\mathcal{S})$$

En posant $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{K})$, le système $(\mathcal{S})$ s'écrit alors sous la forme matricielle :

$$\mathrm{AX} = \mathrm{B}. \qquad (\mathcal{S})$$

Un système linéaire n'est donc qu'une grosse équation de la forme $ax = b$ que nous connaissons bien. Dans $\mathbb{R}$ [1], il suffit de multiplier les deux membres par l'inverse de a noté $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ et le tour est joué : $x = a^{-1}b$.

Si la résolution d'un système linéaire sera intimement lié à l'existence d'une matrice inversible, nous allons présenter une manière algorithmique de résolution : le pivot de Gauss et montrer le lien avec la recherche de l'inverse de la matrice du système.

Remarques et Vocabulaire :

— La matrice A s'appelle la matrice du système et on considère parfois sa matrice, dite *augmentée*,

$$\tilde{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} | \mathrm{B} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{2,m} & b_m \end{array}\right).$$

— On identifie $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *i.e.* on confond usuellement le vecteur ligne d'inconnues $\begin{pmatrix} x_1, x_2, \cdots, x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ avec la colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Exemples 1 :

— Le système 2×2, $\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 5 \\ 5x & - & 4y & = & 1 \end{array} \right.$ s'écrit sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

— De même, le système 2×3 :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 4x & + & 5y & & & = & 1 \end{array} \right. \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

[1]. qui est un corps *i.e.* tout élément non nul est inversible.

— Et le système 3×2 :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & - & 2y & = & 5 \\ 3x & - & 4y & = & 1 \\ -5x & + & 6y & = & 1 \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 2 : On conserve les notations de la définition (1) .

— On dit que le système $(\mathcal{S})$ est *homogène* si $\mathrm{B} = (0)_{\mathbb{K}^m}$ et on note $(\mathcal{S}_0)$ le système homogène associé à $(\mathcal{S})$ obtenu en remplaçant B par $(0)_{\mathbb{K}^m}$.

— *Résoudre* le système $(\mathcal{S})$ c'est trouver l'ensemble des vecteurs $\mathrm{X} \in \mathbb{K}^n$ vérifiant $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$. Le système est alors dit *compatible* dans ce cas, *incompatible* sinon.

— Deux systèmes sont dits *équivalents* lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.

Remarques :

— Tout système homogène admet, au moins, le vecteur nul comme solution.
— $\emptyset$ est un ensemble solution tout à fait acceptable.

Exemples 2 :

— Les systèmes $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & & & = & 1 \\ -3x & + & 6y & + & z & = & -2 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+2\lambda \\ y & = & \lambda \\ z & = & 1 \end{array}\right.$ sont équivalents.

— $(1\,;0\,;1)$, $(-1\,;-1\,;1)$ et, plus généralement $(1+2t\,;t\,;1)$ pour $t\in\mathbb{R}$ sont solution des systèmes précédents qui admettent donc une infinité de triplets solutions.

— $\left\{\begin{array}{rcl} 3x-5y & = & 1 \\ -6x+10y & = & -2 \end{array}\right.$ admet tout couple de réels $(x\,;y)$ comme solution.

— $\left\{\begin{array}{rcl} 3x-5y & = & 1 \\ -6x+10y & = & 1 \end{array}\right.$ est incompatible.

— $\left\{\begin{array}{ccccl} x & & & = & 3 \\ & y & & = & 1 \\ & & z & = & 0 \end{array}\right.$ admet $(3\,;1\,;0)$ comme unique solution. La matrice associée à ce système est l'identité.

I.2 Systèmes équivalents et opérations élémentaires

Soient $n \in \mathbb{N}$, $i, j \in [\![1\,;n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note :

- $$\mathrm{L}_{i,j,n} = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 0 &&&& 1 &&& \\ &&&& 1 &&&&&& \\ &&&&& \ddots &&&&& \\ &&&&&& 1 &&&& \\ &&& 1 &&&& 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ i & j \end{matrix}$$

- $$\mathrm{H}_{i,n}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& \lambda &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} \uparrow \\ i \end{matrix}$$

- $$\mathrm{T}_{i,j,n}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& \ddots &&& \\ && \lambda && 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} \uparrow \\ j \end{matrix}$$

Proposition 1 (Effet d'une matrice d'opérations élémentaires sur les lignes) :
Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

— Multiplier A par $\mathrm{L}_{i,j,n}$ à gauche revient à permuter les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lignes de A.

On note $\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$ cette opération.

— Multiplier A par $\mathrm{H}_{i,n}(\lambda)$ à gauche revient à multiplier la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par λ.

On note $\mathrm{L}_i \leftarrow \lambda \mathrm{L}_i$ cette opération.

— Multiplier A par $\mathrm{T}_{i,j,n}(\lambda)$ à gauche revient à additionner la $j^{\text{ème}}$ ligne de A multipliée par λ à la $i^{\text{ème}}$ (avec $i \neq j$).

On note $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \lambda \mathrm{L}_j$ cette opération.

Preuve : Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $r \in [\![1\,;n]\!]$ et $s \in [\![1\,;p]\!]$.

— Par définition de $\mathrm{L}_{i,j,n}$, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$:

$$\left(\mathrm{L}_{i,j,n}\right)_{rk} = 0 \text{ si } r \neq k \text{ et } r \neq i \text{ et } r \neq j \tag{XVIII.1}$$

$$\left(\mathrm{L}_{i,j,n}\right)_{rr} = \begin{cases} 0 \text{ si } r = i \text{ ou } r = j, \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases} \tag{XVIII.2}$$

$$\left(\mathrm{L}_{i,j,n}\right)_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ si } k = j, \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases} \tag{XVIII.3}$$

$$\left(\mathrm{L}_{i,j,n}\right)_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ si } k = i, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \tag{XVIII.4}$$

Par définition du produit matriciel, on a :

$$\left(\mathrm{L}_{i,j,n}\mathrm{A}\right)_{rs} = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{L}_{i,j,n}\right)_{rk} (\mathrm{A})_{ks}$$
$$\underset{\text{d'après (XVIII.1)}}{=} \begin{cases} \left(\mathrm{L}_{i,j,n}\right)_{rr} (\mathrm{A})_{rs} \underset{\text{d'après (XVIII.2)}}{=} (\mathrm{A})_{rs} \text{ si } r \neq i \text{ et } r \neq j \\ \left(\mathrm{L}_{i,j,n}\right)_{ir} (\mathrm{A})_{rs} \underset{\text{d'après (XVIII.3)}}{=} \begin{cases} (\mathrm{A})_{js} & \text{si } s = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \\ \left(\mathrm{L}_{i,j,n}\right)_{jr} (\mathrm{A})_{rs} \underset{\text{d'après (XVIII.4)}}{=} \begin{cases} (\mathrm{A})_{is} & \text{si } s = i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Les lignes de A ont donc été conservées pour la plupart. Seules, la $i^{\text{ème}}$ et la $j^{\text{ème}}$ ont été permutées.
— Le calcul est identique pour les deux autres matrices.

Vocabulaire :
- Les matrices $L_{i,j,n}$ s'appellent des *matrices de permutation*.
- Les matrices $H_{i,n}$ s'appellent des *matrices de dilatation*.
- Les matrices $T_{i,j,n}$ s'appellent des *matrices de transvection*.

De même à droite avec les colonnes :

Proposition 2 (Effet d'une matrice d'opérations élémentaires sur les colonnes) :
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Multiplier A par $L_{i,j,p}$ à droite revient à permuter les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ colonnes de A.

  On note $C_i \leftrightarrow C_j$ cette opération.
- Multiplier A par $H_{i,p}(\lambda)$ à droite revient à multiplier la $i^{\text{ème}}$ colonne de A par λ.

  On note $C_i \leftarrow \lambda C_i$ cette opération.
- Multiplier A par $T_{i,j,p}(\lambda)$ à droite revient à additionner la $j^{\text{ème}}$ colonne de A multipliée par λ à la $i^{\text{ème}}$ (avec $i \neq j$).

  On note $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ cette opération.

Définition 3 (Opérations élémentaires sur les lignes) : On appelle *opérations élémentaires* sur les lignes d'un système, les opérations ci-dessous :

Permutation : $L_i \leftrightarrow L_j$, permuter les lignes i et j

Dilatation $(\lambda \neq 0)$ **:** $L_i \leftarrow \lambda L_i$, multiplier la ligne i par λ.

Transvection : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ et, par extension, $L_i \leftarrow \mu L_i + \lambda L_j$, remplacer la ligne i par une combinaison linéaire des lignes i et j.

Effectuer de telles opérations sur un système revient donc à multiplier la matrice augmentée du système à gauche par les matrices d'opérations élémentaires correspondantes.

Théorème 3 :
1. Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrices sont bijectives.
2. Deux systèmes linéaires qui se déduisent l'un de l'autre par un nombre fini d'opérations élémentaires sur les **lignes** sont équivalents.

   On note généralement :
$$(\mathcal{S}) \sim_L (\mathcal{S}), \qquad \tilde{A} \sim_L \tilde{A}' \quad \text{ou} \quad A \sim_L A'.$$

Remarque : L'équivalence par ligne est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

CHAPITRE XVIII. SYSTÈMES LINÉAIRES

Preuve :

1. Il suffit de remarquer que :
   - $(L_i \leftrightarrow L_j)^{-1} = (L_i \leftrightarrow L_j)$. En particulier, les permutations sont involutives.
   - Si $\lambda \neq 0$, $(L_i \leftarrow \lambda L_i)^{-1} = \left(L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i\right)$.
   - $(L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j)^{-1} = (L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j)$.
2. Simple conséquence de la bijectivité des opérations élémentaires : les opérations élémentaires ne modifient pas l'ensemble des solutions d'un système linéaire, car on peut toujours les défaire.

D'un point de vue matriciel,

Corollaire 3.1 :
Les matrices de permutation et de transvection ainsi que celles de dilatation pour $\lambda \neq 0$ sont inversibles.

Preuve : Soient $n \in \mathbb{N}$, $i, j \in [\![1\,;n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

D'après la démonstration précédente, on a facilement :

- $L_{i,j,n}^{-1} = L_{i,j,n}$. En particulier, les permutations sont involutives.
- $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, $T_{i,n}(\lambda)^{-1} = T_{i,n}(-\lambda)$.
- Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors $H_{i,n}(\lambda)^{-1} = H_{i,n}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$

Méthode 1 (Travailler sur la matrice du système) :

- Il revient au même de travailler par opérations élémentaires sur le système ou sur sa matrice augmentée. On notera $\tilde{M} \sim_O \tilde{M}'$ pour préciser l'opération O effectuée sur les lignes.
- Travailler sur la matrice permet d'avoir des notations plus concises tout en conservant toutes les informations nécessaires à la résolution.
- Dans le cas des systèmes homogènes, il suffit de travailler sur la matrice A au lieu de la matrice augmentée $\tilde{A} = (A \mid 0)$ car les opérations élémentaires laissent la colonne du second membre invariante à 0.

Exemple 3 : Résolution d'un système linéaire à l'aide d'opérations élémentaires sur ses lignes.

$$(\mathcal{S}_3) : \left\{\begin{array}{rcl} x+3y-z &=& -6 \\ 2x+5y+z &=& 4 \\ 3x +2z &=& 16 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x+3y-z &=& -6 & \\ -y+3z &=& 16 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -9y+5z &=& 34 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} x+3y-z &=& -6 & \\ -y+3z &=& 16 & \\ -22z &=& -110 & L_3 \leftarrow L_3 - 9L_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} x+3y-z &=& -6 & \\ -y+3z &=& 16 & \\ z &=& 5 & L_3 \leftarrow -\frac{1}{22} L_3 \end{array}\right.$$

On dit qu'on a *échelonné* le système (disposition en escalier). Ce dernier système est très facile à résoudre, et le théorème (3) permet d'affirmer qu'il a le même ensemble de solutions que $(\mathcal{S}_3)$.

Exemple 4 : On peut choisir de travailler en matrice augmentée.

Pour le système de l' exemple (3) , on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -6 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 16 \end{array}\right) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & 16 \\ 0 & -9 & 5 & 34 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_2 - 3L_1 \end{array}$$

$$\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & -22 & -110 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - 9L_2$$

$$\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow -\frac{1}{22}L_3$$

On dit que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est *échelonnée par lignes.*

I.3 Systèmes échelonnés

L'idée : Si la matrice du système est diagonale *i.e.* si le système linéaire associé s'écrit :

$$(\mathcal{S}) : \left\{\begin{array}{ccccc} \alpha_1 x_1 & & & = & b_1 \\ & \alpha_2 x_2 & & = & b_2 \\ & & \ddots & = & \vdots \\ & & \alpha_n x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

i.e. si le système est dit *échelonné réduit*, il est facile de le résoudre.

En effet, ici, on aura très facilement et à l'unique condition que $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, $\alpha_i \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{\alpha_1} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{\alpha_n} \end{pmatrix}.$$

Plus précisément,

Proposition 4 :
Un système diagonal $(\alpha_i x_i = b_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est compatible si, et seulement si :

$$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\,,\ \alpha_i = 0 \implies b_i = 0.$$

Sous ces conditions, il se résout en divisant par α_i le cas échéant.

ATTENTION Si la diagonale comporte un ou des coefficients nuls alors cela n'entraîne pas qu'il n'y a pas de solutions mais plutôt une infinité en cas de compatibilité.

Définition 4 (Système triangulaire supérieur) : Un système $(\mathscr{S})$ est dit *triangulaire* supérieur si sa matrice $A \in \mathscr{T}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure :

$$\forall\, ij \in [\![1\,;n]\!]\,,\quad i > j \implies a_{ij} = 0.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & & & \ddots & & & \vdots & = & \vdots \\ & & & & a_{n-1,n-1}x_{n-1} & + & a_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\ & & & & & & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

Méthode 2 (Résoudre un système triangulaire par remontée) :
Pour résoudre de tels systèmes, on procède par « remontée » :

1. L_n est de la forme $a_{n,n}x_n = b_n$ et permet d'exprimer x_n si $a_{n,n} \neq 0$. On peut alors éliminer l'inconnue x_n des lignes 1 à $n-1$ par soustraction.
2. La nouvelle ligne $n-1$ est de la forme $L_{n-1} : a_{n-1,n-1}x_{n-1} = b'_{n-1}$ permet d'exprimer x_{n-1} en fonction de b'_{n-1} si $a_{n-1,n-1} \neq 0$ et d'éliminer x_{n-1} des lignes 1 à $n-2$.
   ...
3. On traite ainsi successivement les lignes par ordre décroissant.
4. Si un coefficient diagonal $a_{i,i}$ est nul, il faut examiner la compatibilité de la i-ème ligne qui doit être une équation de la forme $0 = 0$, sinon le système n'a pas de solution.
5. On finit par traiter une $1^{\text{ère}}$ ligne de la forme $\tilde{L}_1 : a_{1,1}x_1 = \tilde{b}_1$.

Exemple 5 : Reprenons le système de l' exemple (3) :

$$(\mathcal{S}_3) : \left\{\begin{array}{rcr} x + 3y - z & = & -6 \\ -y + 3z & = & 16 \\ z & = & 5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & +3y & & = & -1 \\ & -y & & = & 1 \\ & & z & = & 5 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & 2 \\ & -y & & = & 1 \\ & & z & = & 5 \end{array}\right. \quad L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 2 \\ y & = & -1 \\ z & = & 5. \end{array}\right. \quad \text{et} \quad (\mathcal{S}_3) = \{\,(2\,;-1\,;5)\,\}.$$

Exemple 6 : À partir de la matrice augmentée de l' exemple (4) , on obtient également :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{array}$$

$$\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2$$

$$\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow -L_2$$

Cette matrice correspond au système diagonal $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2 \\ y & = & -1 \\ z & = & 5 \end{array}\right.$ dont l'ensemble des solutions est transparent !

On dit que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est *échelonnée réduite par lignes.*

Exercice 1 : Résoudre les systèmes suivants :

1. $\left\{\begin{array}{r} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_2 - 6x_3 = 4 \\ 3x_3 = 6 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{r} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_3 = 4 \\ -3x_3 = 6 \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{r} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_3 = 5 \\ -3x_3 = 6 \end{array}\right.$

Correction :

1. $\mathcal{S} = \{(-37\,;8\,;2)\}$.
2. $\left\{\begin{array}{r} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_3 = 4 \\ -3x_3 = 6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rclr} x_1 & = & 7 & -4x_2 \\ x_2 & = & & x_2 \\ x_3 & = & -2 & \end{array}\right.$

   Donc, $\mathcal{S} = \{(7-4t\,;t\,;-2)\,,\ t \in \mathbb{R}\}$: la droite passant par $(7\,;0\,;-2)$ et de vecteur directeur $(-4\,;1\,;0)$.
3. $\mathcal{S} = \emptyset$. Le système est incompatible.

Les systèmes diagonaux ou triangulaires sont des cas particuliers de systèmes, dits échelonnés :

Définition 5 (Pivot, système échelonné) :

— Dans un système linéaire ou une matrice, on appelle *pivot* d'une ligne non nulle le premier de ses coefficients non nuls.

— On dit que $(\mathcal{S})$ est *échelonné par lignes* lorsque :
1. Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi.
2. À partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le pivot a un indice de colonne strictement à supérieur à celui de la ligne précédente.

— Dans un système échelonné, on dit qu'une inconnue est
  — *principale* si son coefficient est un pivot sur une des lignes du système ;
  — *secondaire* sinon.

Exemples 7 (Systèmes échelonnés) :

1. $\left\{\begin{array}{rrrrcr} 1x & 2y & -z & +2t & = & 4 \\ & -1y & +2z & & = & 3 \\ & & & 5t & = & 1 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcr} 5x+y+2t-u & = & -2 \\ 2u & = & 3 \end{array}\right.$

3. $\left\{ 1x+y+2z-1t = 2 \right.$

4. $\left\{\begin{array}{rrrrrcr} 5x & +y & & +2t & -u & = & -2 \\ & 1y & +z & -t & 3u & = & 3 \\ & & 3z & -2t & +5u & = & 6 \\ & & & & -1u & = & 1 \end{array}\right.$

5. $\left\{\begin{array}{rrrrcr} 2x & & & & = & 1 \\ & -3y & & & = & 3 \\ & & 1z & & = & 6 \\ & & & -6u & = & 12 \end{array}\right.$ Ce système est dit échelonné *réduit*.

Exemples 8 (Systèmes non échelonnés) :

1. $\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & 2y & -z & +2t & = & 4 \\ x & -y & & 2t & = & 3 \\ & & & 5t & = & 1 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcr} 5x+y+2t-u & = & -2 \\ -4y+t-2u & = & 3 \\ 5y+2t+u & = & 0 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{rrrrrcr} 5x & +y & & +2t & -u & = & -2 \\ & y & +z & -t & +3u & = & 3 \\ & & 3z & -2t & +5u & = & 6 \\ & & z & +t & & = & -1 \\ & & & -t & & = & 1 \end{array}\right.$

II/ Résolution pratique

II.1 Algorithme de Gauss

L'objectif de l'*algorithme de Gauss* est donc de transformer tout système linéaire en un système échelonné **équivalent** par des opérations élémentaires décrites au paragraphe (I.2) .

Considérons un système quelconque où chaque point $\bullet$ représente un coefficient du système, éventuellement 0.

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

Nous allons faire disparaître progressivement ces coefficients en les annulant et obtenir finalement la forme *échelonnée* du système étudié.

Étape 1 : On choisit dans le système un coefficient non nul $\checkmark$ appelé *pivot*. Bien sûr, si tous les coefficients sont nuls, le système est résolu ! S'il n'y est pas déjà, on peut toujours placer ce pivot en position $(1, 1)$ en permutant deux équations et/ou deux inconnues. Le système initial :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right. \quad \text{devient} \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

après une éventuelle opération $L_i \leftrightarrow L_j$ et un éventuel échange d'inconnues.

ATTENTION Permuter les inconnues n'est pas une opération élémentaire sur les colonnes, mais simplement une réindexation.

Remarque : Dans la mesure du possible, privilégiez un coefficient de pivot de valeur 1, vos calculs ultérieurs s'en trouveront simplifiés. Afin d'éviter les quotients, réservez l'opération $L_i \leftarrow \dfrac{1}{\lambda_i} L_i$ à la fin de l'algorithme.

Étape 2 : Grâce au pivot, on annule par des opérations $L_i \leftarrow L_i - \lambda_i L_1$ ou $L_i \leftarrow \lambda_1 L_i - \lambda_i L_1$ tous les coefficients de la première colonne sous le pivot.

Le système devient :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

Remarque : Évitez les divisions et si une ligne nulle apparaît à cette étape, on la supprime sans ménagement.

Reprise des étapes 1 et 2 : On reprend les étapes 1 et 2 avec le sous-système obtenu par oubli de la ligne 1.

Le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \checkmark & \bullet & = & \bullet \end{array}\right. \quad \text{devient} \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right. \quad \text{puis} \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

Et on recommence : On poursuit l'algorithme jusqu'à la $m^{\text{ème}}$ ligne ou jusqu'à n'avoir que des lignes nulles.

Le résultat final est appelé une forme échelonnée du système :

$$\begin{cases} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{cases}$$

Remontée : On annule à présent tous les coefficients situés au-dessus des symboles $\checkmark$.

La méthode est la même que précédemment, on utilise les pivots et des opérations $\mathrm{L}_i \leftarrow \lambda_j \mathrm{L}_i + \lambda_i \mathrm{L}_j$.

Le système échelonné devient :

$$\begin{cases} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{cases} \text{ puis } \begin{cases} \checkmark & \bullet & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \checkmark & & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{cases}$$

Et c'est fini ! Sur l'exemple choisi, on peut exprimer les inconnues *principales* 1, 2 et 3 en fonction des inconnues *secondaires* 4 et 5, ce qui achève la résolution du système.

Vocabulaire : Pour les puristes, on appelle *algorithme de Gauss*, l'algorithme qui conduit à un système échelonné et algorithme (d'élimination) de Gauss-Jordan pour celui qui mène à un système échelonné réduit et dont tous les pivots sont égaux à 1.

La complexité algorithmique asymptotique de l'élimination de Gauss est $\mathrm{O}\left(n^3\right)$ *i.e.* $n \times n$ étant la taille de la matrice, le nombre d'instructions à réaliser est proportionnel à n^3. Nous verrons que c'est plutôt bien.

Un peu d'histoire : *En mathématiques, plus précisément en algèbre linéaire, l'élimination de Gauss-Jordan, aussi appelée méthode du pivot de Gauss, nommée en hommage à Carl Friedrich Gauss et Wilhelm Jordan, est un algorithme pour déterminer les solutions d'un système d'équations linéaires, pour déterminer le rang d'une matrice ou pour calculer l'inverse d'une matrice (carrée) inversible. Lorsqu'on applique l'élimination de Gauss à une matrice, on obtient sa forme échelonnée réduite.*

Cette méthode est connue des mathématiciens chinois depuis au moins le 1^er^ siècle de notre ère. Elle est référencée dans le livre chinois Jiuzhang suanshu (Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique), dont elle constitue le huitième chapitre, sous le titre « Fang cheng » (la disposition rectangulaire). La méthode est présentée au moyen de dix-huit exercices. Dans son commentaire daté de 263, Liu Hui en attribue la paternité à Chang Ts'ang, chancelier de l'empereur de Chine au II^ème^ siècle avant notre ère.

En Europe, cette méthode a été découverte et présentée sous forme moderne au XIX siècle. En 1810, Carl Friedrich Gauss présente sa méthode des moindres carrés dans un livre étudiant le mouvement de l'astéroïde Pallas. Dans l'article 13 de ce livre, il décrit une méthode générale de résolution de système d'équations linéaires qui constitue l'essentiel de la méthode du pivot. En 1888, Wilhelm Jordan publie un livre de géodésie précisant comment utiliser cette méthode et adoptant une notation un peu différente. C'est grâce à ce dernier livre que cette méthode se diffusa dans tout l'Occident. Elle est aujourd'hui connue sous le nom d'élimination de Gauss-Jordan ou méthode du pivot de Gauss.

Exemple 9 :

$$(\mathcal{S}_9) : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 3z & + & t & = & 3 \\ x & - & 2y & + & 3z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ & & y & + & z & - & t & = & -1 \\ & - & y & + & 2z & - & 2t & = & -2 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftarrow \frac{1}{3}(L_3+L_2)}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ & & y & + & z & - & t & = & -1 \\ & & & & z & - & t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_1\leftarrow L_1-L_3 \\ L_2\leftarrow L_2-L_3}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & & & + & 2t & = & 3 \\ & & y & & & & & = & 0 \\ & & & & z & - & t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & & & + & 2t & = & 3 \\ & & y & & & & & = & 0 \\ & & & & z & - & t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 3 & - & 2t \\ y & = & 0 & & \\ z & = & -1 & + & t \\ t & = & & & t \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : Pour bien faire apparaître le rôle des inconnues secondaires en tant que paramètre, on notera plutôt les solutions sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda.\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{K}.$$

D'un point de vue matriciel, $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim_L \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$.

Méthode 3 (Résoudre un système échelonné) :
Pour résoudre un système échelonné :

1. Par remontée, on élimine avec des opérations élémentaires les inconnues principales dans les lignes où elles ne sont pas en position de pivot.
2. S'il y a des inconnues secondaires, on les considère comme des paramètres prenant librement toute valeur possible dans $\mathbb{K}$: on exprime les inconnues principales en fonction des ces paramètres.
3. On rajoute finalement des lignes $x_i = 0 + \cdots + 1 \cdot x_i + \cdots + 0$ pour les inconnues secondaires.

L'ensemble de solutions peut alors s'écrire sous la forme de solutions paramétriques :

$$(\mathcal{S}) = \left\{ \mathrm{X}_p + t_1\mathrm{X}_1 + t_2\mathrm{X}_2 + \cdots + t_j\mathrm{X}_j \mid t_1, \dots, t_j \in \mathbb{K} \right\},$$

où $\mathrm{X}_p \in \mathbb{K}^n$ est une *solution particulière* de $(\mathcal{S})$, $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_j$ sont les inconnues secondaires.

Remarque : Tout vecteur de $\mathbb{K}^n$ de la forme $t_1\mathrm{X}_1 + t_2\mathrm{X}_2 + \cdots + t_j\mathrm{X}_j$ où $t_1, \dots, t_j \in \mathbb{K}$ est solution du système $(\mathrm{A} \mid 0)$ linéaire homogène associé.

Exemple 10 :

$$(\mathcal{S}_{10}) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ x & + & y & + & z & + & 2t & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\underset{\substack{\mathrm{L}_2 \leftarrow \frac{1}{2}(\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2) \\ \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_4}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \end{array} \right.$$

$$\underset{\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - 2\mathrm{L}_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & = & 3 & - & z & - & t \\ y & = & -1 & & & - & t \\ z & = & & & z & & \\ t & = & & & & & t \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda. \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu. \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{K}^2.$$

D'un point de vue matriciel, $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim_{\mathrm{L}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$

Exercice 2 : Déterminer l'ensemble des solutions du système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ x & + & y & + & z & + & 2t & = & 2 \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Correction :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ x & + & y & + & z & + & 2t & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 & \\ & & y & & & + & t & = & -1 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \frac{1}{2}\mathrm{L}_1 - \frac{1}{2}\mathrm{L}_2 \\ & & y & & & + & t & = & -1 & \\ & & y & & & + & t & = & -1 & \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & & & + & z & + & t & = & 3 & \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - 2\mathrm{L}_2 \\ & & y & & & + & t & = & -1 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & = & 3 & - & z & - & t \\ y & = & -1 & & & - & t \\ z & = & & & z & & \\ t & = & & & & & t \end{array}\right. = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des quadruplets $\begin{pmatrix} 3-\lambda-\mu \\ -1-\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$, où $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$.

Remarque : Le choix des inconnues, dites *principales*, n'est pas fixé. On aurait très bien pu prendre y et z par exemple pour obtenir :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} y & = & -1 & & & - & t \\ z & = & 3 & - & x & - & t \end{array}\right.$$

On trouve alors un système des solutions équivalents au précédent et défini par :

$$(0,\ -1,\ 0,\ 3) + \operatorname{vect}\left((1,\ 0,\ -1,\ 0),\ (0,\ -1,\ -1,\ 1)\right).$$

Méthode 4 (Solutions d'un système linéaire échelonné) :

1. Un système linéaire échelonné est compatible si, et seulement si il ne comporte pas de pivot sur la colonne des seconds membres *i.e.* un coefficient non nul à droite dans la matrice augmentée du système.

   Le fait de ne pas avoir de pivot sur la colonne du second membre donne lieu à des conditions de compatibilité. (*cf.* exemple (11))
2. Pour un système échelonné compatible, on a l'alternative suivante :
   (a) Soit il n'a que des inconnues principales et alors il admet une unique solution.
   (b) Soit on peut paramétrer l'ensemble des solutions à l'aide des inconnues secondaires et dans ce cas, il possède une infinité de solutions.

Exemples 11 : Soit $a \in \mathbb{K}$.

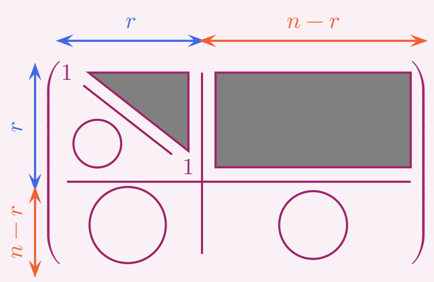
— $(\mathcal{S}) : \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 4 \\ y-z & = & 2 \\ z & = & a^2+a-2 \end{array}\right.$ dont la matrice augmentée est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a^2+a-2 \end{array}\right)$ est compatible.

— $(\mathcal{S}') : \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 4 \\ y-z & = & 2 \\ 0z & = & a^2+a-2 \end{array}\right.$ dont la matrice augmentée est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+a-2 \end{array}\right)$ est compatible si, et seulement si $a \in \{-2; 1\}$.

II.2 Point de vue matriciel

Méthode 5 (Algorithme d'élimination de Gauss-Jordan) :
Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice non nulle.

1. Quitte à prendre la transposée de A, il existe au moins un coefficient non nul dans la première colonne de A. On peut supposer que c'est a_{11} en multipliant à gauche A par une matrice de permutation si ce n'était pas le cas et en effectuant l'opération
$$\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_i.$$
En multipliant par une matrice de dilatation *i.e.* $\mathrm{L}_1 \leftarrow \dfrac{1}{a_{11}}\mathrm{L}_1$, on peut même supposer $a_{11} = 1$. C'est le premier pivot.
2. En multipliant à gauche par des matrices de transvection, on annule tous les coefficients de la première colonne à partir de la deuxième ligne par des opérations élémentaires de la forme :
$$\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}\mathrm{L}_1.$$
La matrice A est alors transformée en une matrice de la forme :
$$\begin{pmatrix} 1 & \bullet & \dots & \bullet \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{np} \end{pmatrix}.$$
3. Si la matrice $\begin{pmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n2} & \dots & a'_{np} \end{pmatrix}$ n'est pas nulle, on poursuit l'algorithme.
4. L'algorithme s'arrête lorsque l'on a atteint la dernière ligne ou lorsque toutes les lignes qui restent sont nulles *i.e.* la matrice A est alors transformée en une matrice échelonnée (réduite) de la forme :



Remarque : Les opérations sont les mêmes sur les colonnes en multipliant, cette fois, à droite par les matrices d'opérations élémentaires.

Figure XVIII.1 – Algorithme de Gauss-Jordan d'un point de vue matriciel.

On obtient déjà un résultat d'importance :

Théorème 5 :

Tout système linéaire est équivalent par ligne à un système échelonné réduit.

i.e.

Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, il existe une matrice E, produit de matrices de transformations élémentaires et une unique matrice échelonnée réduite (en lignes) R telle que :

$$EA = R.$$

On a bien évidemment le même résultat en raisonnant sur les colonnes avec $AE' = R'$ où E' est un produit de matrices d'opérations élémentaires et R' une matrice échelonnée réduite (en colonne) mais R et R', autant que E et E', n'ont aucune raison d'être égales si A n'est pas inversible.

Preuve : L'algorithme de Gauss-Jordan montre que l'on peut passer d'une matrice à une matrice échelonnée réduite par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. Il suffit de traduire ces opérations élémentaires par des multiplications à gauche par des matrices de transformations élémentaires :

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = R$$

Comme chacune des matrices de transformations élémentaires est inversible, on peut écrire :

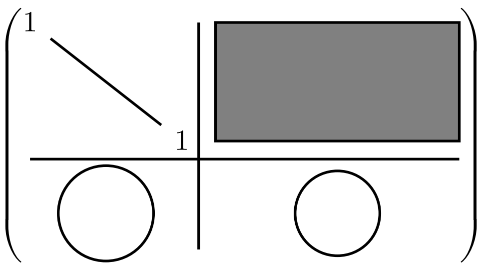
$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} R$$

Les inverses de matrices de transformations élémentaires sont encore des matrices de transformations élémentaires. En notant $E = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k$, on aboutit à

$$A = ER$$

avec E produit de matrices de transformations élémentaires et R matrice échelonnée réduite.

Toute matrice A est donc équivalente (par lignes) à une matrice de la forme :



.

Pour plus de commodités et par abus de langage, on étend le vocabulaire des systèmes à la matrice associée :

Définition 6 :

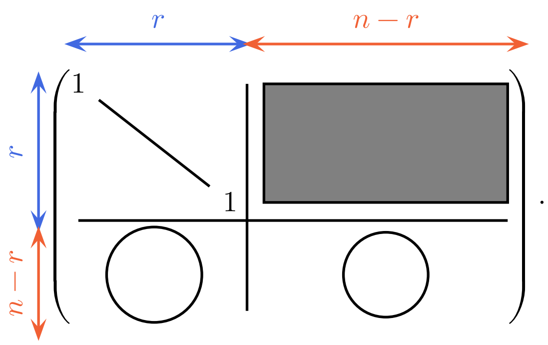
— Une matrice est dite *échelonnée* en lignes si le nombre de zéros précédant la première valeur non nulle d'une ligne augmente strictement ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste éventuellement plus que des zéros.
— Le premier coefficient non nul de chaque ligne est appelé *pivot*.
— Une matrice échelonnée est dite matrice *échelonnée réduite*, ou matrice canonique en lignes, si les pivots valent 1 et si les autres coefficients dans les colonnes des pivots sont nuls.

Définition 7 (Rang d'une matrice) : Soit A une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle *rang* d'une matrice, le nombre de lignes (*resp.* colonnes) non nulles dans sa forme échelonnées en lignes (*resp.* en colonnes).

Remarques :

— Le rang n'étant pas changé par le produit de matrices d'opérations élémentaires, lorsqu'il ne s'agit que de trouver le rang d'une matrice et non son inverse, on peut effectuer des opérations sur les lignes et sur les colonnes en même temps.
— L'algorithme de la méthode (5) en « remontant », on montre ainsi que toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut être transformée en une matrice échelonnée réduite où le rang r est clairement lisible :



II.3 Opérations élémentaires et matrices inversibles

L'inversibilité d'une matrice est un travail ardu lorsque la dimension augmente. Les opérations élémentaires vont grandement nous simplifier la tâche à travers l'algorithme de Gauss-Jordan.

Fixons donc $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice dont nous voulons savoir si elle est inversible ou non et calculer son inverse ou, à défaut, son rang.

— Effectuer des opérations élémentaires sur A, on l'a vu, revient à la multiplier par des matrices inversibles, et si A est elle-même inversible, le résultat de ces multiplications sera toujours une matrice inversible. Si donc à un moment on obtient une matrice NON inversible en cours de calcul, c'est le signe certain que A N'était PAS inversible.
— À présent, faisons l'hypothèse que nous avons réussi à transformer A en I_n par des opérations élémentaires E_1, ..., E_r sur les LIGNES, dans cet ordre.

Matriciellement, cela revient à dire que : $\mathrm{E}_r \dots \mathrm{E}_1 \mathrm{A} = \mathrm{I}_n$ **!! multiplications à GAUCHE !!** ou encore que A est inversible de matrice inverse $\mathrm{E}_r \dots \mathrm{E}_1 = \mathrm{A}^{-1}$.

Conclusion inattendue, l'égalité précédente peut aussi s'écrire trivialement

$$\mathrm{E}_r \dots \mathrm{E}_1 \mathbf{I_n} = \mathrm{A}^{-1}.$$

Les mêmes opérations qui ont transformé A en I_n permettent de transformer I_n en A^{-1}. Ceci nous fournit un algorithme pratique d'échelonnement/réduction ou d'inversion suivant les cas (*confer* exemple (12)).

ATTENTION

Je rappelle encore ici que le produit matriciel N'est PAS commutatif donc on ne peut s'amuser à travailler sur les lignes qui correspond à un produit à gauche puis ou et sur les colonnes ce qui correspond à un produit à droite.

Moralité : lorsque que vous commencerez avec des opérations sur les lignes, vous ne manipulerez plus que les lignes jusqu'à l'obtention de l'inverse et idem pour les colonnes au risque de trouver une matrice qui n'aura rien à voir avec l'inverse recherchée.

Exemple 12 : Montrons que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et donnons son inverse.

On applique simultanément l'algorithme de Gauss à notre matrice A et à la matrice identité :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \qquad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{I_3}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}$$

Transformation de A en I_3 par des opérations élémentaires sur les lignes

Transformation de I_3 en A^{-1} par report des opérations élémentaires qui ont changé A en I_3.

Donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 : Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Correction : On effectue des opérations sur les lignes *i.e.* on multiplie à gauche par des matrices élémentaires :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_1 + L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L2 + 3L_2]{} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Non inversible}}.$$

III/ Ensemble des solutions

Revenons à un peu plus de théorie et concentrons-nous sur la structure de l'ensemble des solutions :

III.1 Linéarité et conséquences

Résoudre $(\mathscr{S})$ c'est déterminer les antécédents de B pour l'application

$$\mathscr{A} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

En particulier, $(\mathcal{S}_0) = \mathscr{A}^{-1}((0)_{\mathbb{K}^m})$.

Par distributivité à droite du produit matriciel, l'application $\mathscr{A}$ vérifie

$$\forall X, X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \mathscr{A}(\lambda X + X') = \lambda \mathscr{A}(X) + \mathscr{A}(X').$$

L'application $\mathscr{A}$ est linéaire et le principe de superposition s'applique.

Proposition 6 (Principe de superposition) :
Soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Si X_1 est solution de $AX = B_1$ et X_2 de $AX = B_2$, alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ est solution de $AX = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$.

Les raisonnement vont donc être sensiblement identiques à ceux menés dans le cadre des équations différentielles linéaires.

Théorème 7 (Structure de l'ensemble des solutions) :
Soient $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^m$. On considère le système linéaire $(\mathcal{S})$ sous sa forme matricielle $AX = B$ où $X \in \mathbb{K}^n$ et $(\mathcal{S}_0)$ son système homogène associé.

1. $(\mathcal{S}_0)$ est non vide et stable par combinaisons linéaires. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
2. Si $(\mathcal{S})$ est compatible, la solution générale du système est la somme d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène :

Solution générale	=	Solution particulière	+	Solution de l'équation homogène.
$(\mathcal{S})$	=	X_p	+	$(\mathcal{S}_0)$.

Preuve :

1. $(\mathcal{S}_0)$ contient le vecteur nul $(0)_{\mathbb{K}^n}$ donc $(\mathcal{S}_0)$ est non vide.

   La stabilité par combinaisons linéaires est une conséquence de la linéarité du produit matriciel à droite :

   Soient $\lambda \in \mathrm{K}$ et X, X' deux éléments de $(\mathcal{S}_0)$.

   Alors, $\mathrm{A}(\lambda\mathrm{X}+\mathrm{X}') = \lambda\mathrm{AX}+\mathrm{AX}' = (0)_{\mathbb{K}^m}+(0)_{\mathbb{K}^m} = (0)_{\mathbb{K}^m}$ *i.e.* $\lambda\mathrm{X}+\mathrm{X}' \in (\mathcal{S}_0)$: $(\mathcal{S}_0)$ est stable par combinaisons linéaires.
2. Comme $(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ on peut considérer X_p un de ses éléments *i.e.* $\mathrm{AX}_p = \mathrm{B}$.

   On a alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{AX}=\mathrm{B} &\iff \mathrm{AX}=\mathrm{AX}_p \iff \mathrm{A}(\mathrm{X}-\mathrm{X}_p = (0)_{\mathbb{K}^m}\\ &\iff \mathrm{X}-\mathrm{X}_p \text{ est solution du système homogène.}\\ &\iff \mathrm{X} \text{ est la somme de la solution particulière}\\ &\qquad \text{et d'une solution du système homogène.}\end{aligned}$$

Vocabulaire : On dit que l'ensemble des solutions du système $(\mathcal{S})$ est un espace affine dirigé par l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène.

Exemple 13 : Soit le système $(\mathcal{S}_{13})$: $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x &+& 2y &-& z &=& -3\\ 2x &+& 5y &+& z &=& 4\\ x &+& y &+& z &=& 2\end{array}\right.$ d'inconnue $(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(\mathcal{S}_{13}) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x &+& 2y &-& z &=& -3 &\\ && y &+& 3z &=& 10 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1\\ && y &-& 2z &=& -5 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x &+& 2y &-& z &=& -3 &\\ && y &+& 3z &=& 10 &\\ &&&& 5z &=& 15 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_3\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcr} x &=& -2\\ y &=& 1\\ z &=& 3\end{array}\right.$$

L'unique solution de $(\mathcal{S}_{13})$ est donc le triplet $\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} + (0)_{\mathbb{R}^3}$.

Solution particulière

Solution homogène

Exemple 14 : Enlevons une équation au système précédent. La résolution est identique :

$$(\mathcal{S}_{14}) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ 2x & + & 5y & + & z & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & - & z & = & -3 & \\ & & y & + & 3z & = & 10 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & -23 & + & 7z \\ y & = & 10 & - & 3z \\ z & = & & & z \end{array}\right. .$$

Remarque : Les inconnues x et y sont les inconnues *principales* et l'inconnue z est l'inconnue *secondaire*.

Les solutions de $(\mathcal{S}_{14})$ sont donc tous les triplets $\begin{pmatrix} -23+7\lambda \\ 10-3\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\lambda.\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Solution homogène}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution particulière

III.2 Rang d'un système linéaire

Définition 8 (Rang d'un système linéaire) : On appelle *rang* d'un système linéaire, le nombre de ses inconnues principales.

Exemples 15 :

— $(\mathcal{S}_3)$ est de rang 3.

— $(\mathcal{S}_{13})$ est de rang 3.

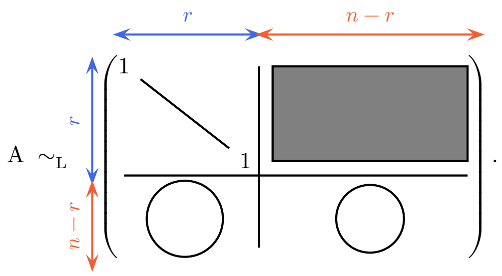
— $(\mathcal{S}_{14})$ est de rang 2.

Le théorème (5) a immédiatement une conséquence importante :

Corollaire 7.1 :
Le rang d'un système linéaire est égal au nombre de ses pivots après échelonnement.

On retrouve ici la définition (7) .

Preuve : Il suffit de se rappeler que toute matrice A est équivalente par lignes à une matrice de la forme :



On dit alors que $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = r$.

Exemples 16 : En reprenant les systèmes de l' exemple (7) on a :

1. Rang 3.
2. Rang 2.
3. Rang 1.
4. Rang 4.
5. Rang 4.

Exemple 17 : Supprimons encore une équation à $(\mathcal{S}_{14})$ pour former $(\mathcal{S}_{17})$:

$$(\mathcal{S}_{17}) : \left\{ x + 2y - z = -3 \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & = & -3 & - & 2y & + & z \\ y & = & & & y & & \\ z & = & & & & & z \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & = & -3 & - & 2\lambda & + & \mu \\ y & = & & & \lambda & & \\ z & = & & & & & \mu \end{array} \right. , \qquad (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Les solutions de $(\mathcal{S}_{17})$ sont donc tous les triplets de la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underbrace{+ \lambda . \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \text{ où } \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}.$$

Solution particulière

Solution homogène

x est la seule inconnue principale donc le système $(\mathcal{S}_{17})$ est de rang 1.

Remarque : On aurait tout aussi bien pu choisir y ou z comme inconnue principale.

Définition 9 (Espace vectoriel engendré par une partie) : Soient X_1, ..., $\mathrm{X}_r \in \mathbb{K}^n$.

L'ensemble des combinaisons linéaires de X_1, ..., X_r est noté $\mathrm{vect}\,(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r)$:

$$\mathrm{Vect}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r) = \Big\{ \lambda_1 \mathrm{X}_1 + \ldots + \lambda_r \mathrm{X}_r \Big\}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}}$$

Exemples 18 : En reprenant les exemples précédents :

— Les solutions de $(\mathcal{S}_{10})$ s'écrivent $\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\0\end{pmatrix} + \text{vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

— Les solutions de $(\mathcal{S}_9)$ s'écrivent $\begin{pmatrix}3\\0\\-1\\0\end{pmatrix} + \text{vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

— Les solutions de $(\mathcal{S}_{14})$ s'écrivent $\begin{pmatrix}-23\\10\\0\end{pmatrix} + \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}7\\-3\\1\end{pmatrix}\right)$.

— Les solutions de $(\mathcal{S}_{17})$ s'écrivent $\begin{pmatrix}-3\\10\\0\end{pmatrix} + \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Définition 10 (Notion de dimension d'un SEV) : On appelle *dimension* de l'ensemble $\mathrm{E} = \text{vect}\,(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_r)$, notée $\dim(\mathrm{E})$, le nombre de vecteurs indépendants de E.

Remarque : La dimension d'un vect n'est pas forcément égale au nombre de ses vecteurs.

Exemples 19 :

— Deux vecteurs sont indépendants si, et seulement si ils ne sont pas colinéaires.

— Trois vecteurs le sont s'ils ne sont pas coplanaires.

Nous reviendrons sur cette notion très importante dans d'ultérieurs chapitres.

Exemples 20 (Dimension de sev dans $\mathbb{R}^2$) :

— $\mathrm{A} = \text{vect}\,((2\,;3)) = \{\,(2x\,;3x)\,\}_{x\in\mathbb{R}}$. C'est la droite d'équation $y = \dfrac{3}{2}x$.

$$\dim(\mathrm{A}) = 1.$$

— $\mathrm{B} = \text{vect}\,((1\,;0)\,,\,(0\,;1)) = \{x\,(1\,;0) + y\,(0\,;1)\,\}_{x,\,y\in\mathbb{R}} = \{\,(x\,;y)\,\}_{x,\,y\in\mathbb{R}}$.

C'est le plan $(x\mathrm{O}y)$ et $\dim(\mathrm{B}) = 2$.

— $\mathrm{C} = \{\,(2+2x\,;1+y-x)\,\}_{x,\,y,\in\mathbb{R}} = \left\{\begin{pmatrix}2+2x\\1-x+y\end{pmatrix}\right\}$

$$= \left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}_{x,\,y\in\mathbb{R}} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \text{vect}\left(\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right).$$

C'est le plan passant par le point $(2\,;1)$ et dirigé par les deux vecteurs indépendants $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ *i.e.* c'est le plan $\mathbb{R}^2$ lui-même et $\dim(\mathrm{C}) = 2$.

Exemples 21 (Dimension de sev dans $\mathbb{R}^3$) :

— Soit D le plan passant par l'origine du repère et dirigé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

dim (D) = 2 et on a :

$$\mathrm{D} = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \left\{\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}_{\lambda,\mu\in\mathbb{R}} = \{(\lambda+\mu\,;2\lambda\,;\mu)\}_{\lambda,\,\mu\in\mathbb{R}}.$$

Remarque : $2x = y + 2z$ donc D est aussi le plan d'équation $2x - y - 2z = 0$.

— $$\mathrm{E} = \{\,(x+y-z\,;2x-y\,;3y+z)\,\}_{x,\,y,\,z\in\mathbb{R}} = \left\{x\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}_{x,\,y,\,z\in\mathbb{R}}$$
$$= \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Les trois vecteurs étant indépendants, c'est l'espace $\mathbb{R}^3$ lui-même : $\dim(\mathrm{E}) = 3$.

— $$\mathrm{F} = \{\,(3+x\,;3x+7\,;1+2x)\,\}_{x\in\mathbb{R}} = \left\{\begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\right\}_{x\in\mathbb{R}} = \begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix} + \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\right).$$

C'est la droite passant par le point $(3\,;7\,;1)$ et dirigé par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$: $\dim(\mathrm{F}) = 1$.

La notation vect () permet une expression agréable de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

Théorème 8 (Rang d'un système) :
Le rang d'un système linéaire est égal au nombre d'inconnues retranché de la dimension de l'ensemble des solutions du système homogène associé.

Exemples 22 : Notons $\mathcal{H}_0$, l'espace vectoriel des solutions du système homogène associé à $(\mathcal{S})$.

— À l' exemple (13) , $\dim \mathcal{H}_0 = 0$ d'où $\mathrm{rg}\,\mathcal{S}_3 = 3 - 0 = 3$.
— À l' exemple (14) , $\dim \mathcal{H}_0 = 1$ d'où $\mathrm{rg}\,\mathcal{S}_2 = 3 - 1 = 2$.
— À l' exemple (17) , $\dim \mathcal{H}_0 = 2$ d'où $\mathrm{rg}\,\mathcal{S}_1 = 3 - 2 = 1$.

Exercice 4 : Résoudre et discuter le système suivant d'inconnue (x, y, z) et de paramètre a :

$$\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$$

Correction : On applique l'algorithme de Gauss :

Si $a \neq 0$,

$$\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases} \iff \begin{cases} ax+y+z & =1 & \\ (a^2-1)y+(a-1)z & =a-1 & \mathrm{L}_2 \leftarrow a\mathrm{L}_2-\mathrm{L}_1 \\ (a-1)y+(a^2-1)z & =a-1 & \mathrm{L}_3 \leftarrow a\mathrm{L}_3-\mathrm{L}_1 \end{cases}$$

Si $a \neq 1$ alors,

$$\iff \begin{cases} ax+y+z & =1 & \\ (a+1)y+z & =1 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \dfrac{1}{a-1}\mathrm{L}_2 \\ y+(a+1)z & =1 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \dfrac{1}{a-1}\mathrm{L}_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} ax+y+z & =1 & \\ (a+1)y+z & =1 & \\ a(a+2)z & =a & \mathrm{L}_3 \leftarrow (a+1)\mathrm{L}_3-\mathrm{L}_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ (a+1)y + z = 1 \\ (a+2)z = 1 \quad a \neq 0 \end{cases}$$

Si $a=-2$, le système est incompatible. On suppose à présent que $a \neq 0$, 1 et -2.

$$\iff \begin{cases} a(a+2)x + (a+2)y = a+1 & \mathrm{L}_1 \leftarrow (a+2)\mathrm{L}_1-\mathrm{L}_3 \\ (a+2)y = 1 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \dfrac{1}{a+1}((a+2)\mathrm{L}_2-\mathrm{L}_3) \\ (a+2)z = 1 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (a+2)x = 1 & \mathrm{L}_1 \leftarrow \dfrac{1}{a}(\mathrm{L}_1-\mathrm{L}_2) \\ (a+2)y = 1 & \\ (a+2)z = 1 & \end{cases}$$

Si $a \neq 0$, 1 et -2, le système admet une unique solution $\left(\dfrac{1}{a+2}\,;\dfrac{1}{a+2}\,;\dfrac{1}{a+2}\right)$.

Si $a=1$, le système est équivalent à $x+y+z=1 \iff \begin{cases} x = -y-z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$ de rang 1 dont les solutions sont le plan vectoriel $\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

CHAPITRE XVIII. SYSTÈMES LINÉAIRES

Si $a = 0$,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 1 \\ x & + & y & & & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & 2z & = & 3 \\ & & 2y & & & = & 1 \\ & & & & 2z & = & 1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - 2L_3 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x & & = 1 \\ & 2y & = 1 \\ & 2z & = 1 \end{array}\right. \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3$$

Le système admet une unique solution $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.

IV/ Systèmes linéaires et matrices inversibles

IV.1 Systèmes de Cramer

Définition 11 (Système de Cramer [2]) : Un système linéaire est dit de *Cramer* si sa matrice est inversible.

En particulier, un système de Cramer est nécessairement carré : autant d'inconnues que d'équations.

Théorème 9 :
Tout système de Cramer $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une unique solution :

$$X = A^{-1}B.$$

Preuve : Comme $A \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{K})$, pour tout $X \in \mathbb{K}^n$, $AX = B \iff X = A^{-1}B$.

L'analogie des équations $ax = b$ et $AX = B$ est confortée. Cependant, comme explicité précédemment, on résoudra bien peu souvent un système en inversant sa matrice. Procédé bien trop couteux en opérations. On lui préférera toujours l'algorithme de Gauss précédent.

[2]. **Gabriel Cramer**, né le 31 juillet **1704** à Genève et mort le 4 janvier **1752** à Bagnols-sur-Cèze, est un mathématicien genevois, professeur de mathématiques et de philosophie à l'académie de Genève. Lui et son collègue Jean-Louis Calandrini sont souvent considérés comme les artisans du renouveau scientifique à Genève au début du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, par l'introduction de la philosophie naturelle newtonienne.

Les contributions de Cramer aux mathématiques portent essentiellement sur l'algèbre et la géométrie, au travers de son unique ouvrage publié, un traité sur les courbes intitulé *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, paru à Genève en 1750. Dans ce traité on trouve notamment la méthode connue aujourd'hui sous le nom de règle de Cramer pour la résolution des systèmes linéaires d'équations, utilisant ce qui sera ultérieurement appelé déterminants.

IV.2 Inversibilité

Le théorème qui suit fait définitivement le lien entre inversibilité d'une matrice et la résolubilité des systèmes linéaires.

Théorème 10 (Matrices inversibles et systèmes linéaires) :
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

La matrice A est inversible si, et seulement si $\forall\, Y \in \mathbb{K}^n$, le système linéaire $Y = AX$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une unique solution.

Preuve :

- Si A est inversible, le système $Y = AX$ est un système de Cramer pour tout $Y \in \mathbb{K}^n$ d'après le théorème (9).
- Réciproquement, supposons que le système linéaire $Y = AX$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une et une seule solution pour tout $Y \in \mathbb{K}^n$.
  - Notons Y_1, ..., Y_n les colonnes de la matrice I_n *i.e.* des vecteurs colonnes avec seulement un coefficient non nul égal à 1 en position i.

    Par hypothèse, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, le système $Y_i = AX$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une solution B_i.

    Si nous notons B la matrice carrée de colonnes B_1, ..., B_n, il est alors immédiat que $AB = I_n$ *i.e.* A est inversible à droite.
  - A-t-on pour autant $BA = I_n$?

    En tout cas $A(BA - I_n) = (AB)A - A = I_n A - A = 0$, donc $BA - I_n$ est solution de l'équation $AX = 0$.

    Or, $(0)_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$ en est évidemment une autre et comme ce système ne possède qu'une seule solution par hypothèse, $BA - I_n = (0)_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})} \iff BA = I_n$.

    En conclusion, A est inversible aussi à gauche donc tout court.

On peut être un peu plus explicite :

Corollaire 10.1 :
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall\, B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.
(ii) $\forall\, B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution.
(iii) $\operatorname{rg}(A) = n$.

(iv) $A \sim_L I_n$.
(v) A est inversible.
(vi) Le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle.

Preuve :

(i) $\Longrightarrow$ ***(ii)*** **:** Qui peut le plus peut le moins.

(ii) $\Longrightarrow$ ***(iii)*** **:** Raisonnons par la contraposée et supposons que $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) < n$. La matrice sera équivalente par lignes à une matrice échelonnée R dont au moins la dernière ligne est nulle.

Posant $\mathrm{A} = \mathrm{ER}$ où la matrice E est un produit de matrices de transformations élémentaires (inversible), on a :

$$\mathrm{AX} = \mathrm{B} \iff \mathrm{ERX} = \mathrm{B} \iff \mathrm{RX} = \mathrm{E}^{-1}\mathrm{B}.$$

Posons alors $\mathrm{B} = \mathrm{E}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B}' = \mathrm{E}^{-1}\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La dernière ligne du système $\mathrm{RX} = \mathrm{B}'$ qui s'écrit $0 = 1$, entraine son incompatibilité donc celle du système équivalent $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ ce qui contredit *(ii)*.

D'où $r = n$ et A est inversible.

(iii) $\Longrightarrow$ ***(i)*** **:** Si $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = n$ alors, $\forall\, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ le système $(\mathrm{A} \mid \mathrm{B})$ est équivalent par lignes à un système échelonné à n pivots. On sait que de tels systèmes admettent une solution unique.

Nous avons donc déjà montré que *(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)* $\Longrightarrow$ *(iii)* $\Longrightarrow$ *(i)* et les trois premières équivalences par transitivité. Poursuivons !

(iii) $\Longrightarrow$ ***(iv)*** **:** Par définition de $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = n$, l'unique matrice échelonnée réduite équivalente par lignes à A est I_n.

(iv) $\Longrightarrow$ ***(v)*** **:** Si $\mathrm{EA} = \mathrm{I}_n$, alors comme E est inversible (en tant que produit de matrices inversibles) $\mathrm{E}^{-1}\mathrm{EA} = \mathrm{E}^{-1}\mathrm{I}_n$, *i.e.* $\mathrm{I}_n\mathrm{A} = \mathrm{E}^{-1}$ et $\mathrm{A} = \mathrm{E}^{-1}$. La matrice A est donc inversible, puisque E^{-1} l'est.

(v) $\Longrightarrow$ ***(vi)*** **:** Par la contradiction, si $\mathrm{AX} = 0$ admettait une solution non nulle X_0 avec A inversible alors on aurait $\mathrm{X}_0 = \mathrm{A}^{-1}0 = 0$ ce qui n'est pas. La solution nulle est clairement solution. C'est la seule.

(vi) $\Longrightarrow$ ***(iii)*** **:** On raisonne par la contraposée. Si $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) < n$ alors il existe au moins une inconnue secondaire et le système $\mathrm{AX} = 0$ admet une infinité de solutions ce qui contredit *(vi)*.

Par implication circulaire, on a donc ici aussi *(iii)* $\Longrightarrow$ *(iv)* $\Longrightarrow$ *(v)* $\Longrightarrow$ *(vi)* $\Longrightarrow$ *(iii)* et les équivalences cherchées qui en découlent.

On retrouve un résultat démontré dans un chapitre précédent :

Corollaire 10.2 (Inversibilité des matrices triangulaires et diagonales) :
Une matrice triangulaire (ou diagonale) est inversible si, et seulement si ses coefficients diagonaux sont **tous** non nuls.

Ce théorème va donc nous permettre à la fois de savoir si oui ou non une matrice est inversible et, le cas échéant, de calculer son inverse. Le mot d'ordre est simple : résoudre un système linéaire !

Exemple 23 : La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

En effet, pour tous $(x,y,z),(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{ll} 2x+3y+z & = a \\ x+y+2z & = b \\ x+y+z & = c \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} x+y+2z & = b \\ 2x+3y+z & = a \\ x+y+z & = c \end{array}\right. \quad \mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_1 \quad \left(\begin{array}{c}\text{choix d'un pivot} \\ \text{simple de valeur 1}\end{array}\right)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} x+y+2z & = b \\ y-3z & = a-2b \\ z & = b-c \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} x+y & = -b+2c \\ y & = a+b-3c \\ z & = b-c \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - 2\mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + 3\mathrm{L}_3 \\ \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} x & = -a-2b+5c \\ y & = a+b-3c \\ z & = b-c. \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Nous avons ainsi réussi à résoudre le système linéaire initial pour TOUT second membre (a,b,c).

Cela prouve que la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

Son inverse $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ apparaît naturellement en fin de résolution.

Méthode 6 (Inversibilité et calcul de l'inverse éventuel) :

Par résolution du système $\mathrm{AX} = \mathrm{Y}$ pour tout second membre Y : On pose $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et on résout $\mathrm{AX} = \mathrm{Y}$ d'inconnue $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec la méthode du pivot.

1. S'il y a une solution, on l'écrit matriciellement comme $\mathrm{X} = \mathrm{BY}$: on a alors $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1}$.
2. Si le système $\mathrm{AX} = \mathrm{Y}$ n'est pas compatible pour au moins un Y, alors A n'est pas inversible.

Par la méthode du pivot sur la matrice concaténée $(\mathrm{A} \mid \mathbf{I}_n)$: On effectue des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice concaténée $(\mathrm{A} \mid \mathbf{I}_n)$ selon la méthode du pivot afin d'échelonner A : on aboutit à une matrice du type $(\mathrm{A}' \mid *)$ avec A' échelonnée.

1. Si A' a strictement moins de n pivots, alors A n'est pas inversible.
2. Si A' a n pivots, alors A est inversible. On réduit alors A' par opérations élémentaires, pour obtenir une matrice équivalente par lignes $(\mathbf{I}_n \mid \mathrm{B})$.

   On conclut alors que $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{B}$.

Exercice 5 : Montrer que la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et donner son inverse.

Correction : Soient $(x\,;y\,;z)$ et $(a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3$.

Dans cet exemple, on va tâcher de montrer en quoi notre nouvelle méthode d'inversibilité n'est qu'une reformulation de la précédente en termes de systèmes linéaires que l'on imagine lors de notre opérations sur les lignes.

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}^{\mathrm{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^{\mathrm{A}} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & a \\ x & + & 2y & + & z & = & b \\ -x & + & 4y & + & 5z & = & c \end{array}\right. \qquad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\mathrm{I}_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & 3y & + & z & = & a & \\ & & y & - & z & = & a - b & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2 \\ & & y & & & = & a - c & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & 3y & + & z & = & a & \\ & & y & - & z & = & a - b & \\ & & & & z & = & b - c & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2 \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & 3y & & & = & a - b + c & \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \\ & & y & & & = & a - c & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3 \\ & & & & z & = & b - c & \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{I}_3} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & & & & & = & -2a - b + 4c & \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - 3\mathrm{L}_2 \\ & & y & & & = & a - c & \\ & & & & z & = & b - c & \end{array}\right. \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{A}^{-1}}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{A}^{-1}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Transformation de A en I_3 par des opérations élémentaires sur les lignes

Transformation de I_3 en A^{-1} par report des opérations élémentaires qui ont changé A en I_3.

Donc A est inversible d'inverse $\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

D'après le corollaire (10.1) , A est inversible si, et seulement si le système $\mathrm{AX} = 0$ n'admet que la solution nulle $\mathrm{X} = (0)_{\mathbb{K}^n}$. Par la contraposée, on a le résultat très intéressant en pratique :

Corollaire 10.3 (Lire la non inversibilité sur les colonnes) :
Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) A N'est PAS inversible.

(ii) Il existe $\mathrm{X} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\mathrm{X} \neq (0)_{\mathbb{K}^n}$ et $\mathrm{AX} = (0)_{\mathbb{K}^n}$.

(iii) Il existe une combinaison linéaire nulle des colonnes de A avec des coefficients non tous nuls :

$$\exists\, (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \cdots, 0)\}, \qquad \alpha_1 \mathrm{A}_1 + \cdots + \alpha_n \mathrm{A}_n = 0_{n,1},$$

où $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n$ désignent les colonnes de A.

Preuve : Il suffit de prendre la négation des assertions du corollaire (10.1) et se rappeler que le produit $\mathrm{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ s'écrit $x_1\mathrm{A}_1 + \dots + x_n\mathrm{A}_n$ où les A_i sont les vecteurs colonnes de A.

Exemples 24 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \notin \mathscr{G}l_3(\mathbb{R})$ car $\mathrm{C}_1 - 2\mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Exercice 6 : Montrer que la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Correction : Le plus rapide et le meilleur est de remarquer que $\mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc la matrice A n'est pas inversible.

Sinon, soient $(x\,;y\,;z)$ et $(a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3$. On applique encore la méthode en considérant le système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & z & = & a \\ x & + & 2y & + & z & = & b \\ -x & + & 4y & + & 5z & = & c \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} x & & & - & z & = & a & & & & & \\ & & 2y & + & 2z & = & -a & + & b & & & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & 4y & + & 4z & = & a & & & + & c & L_3 \leftrightarrow L_1 + L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrl} x & & & - & z & = & a & & & & & \\ & & 2y & + & 2z & = & -a & + & b & & & \\ & & & & 0 & = & 3a & - & 2b & + & c & L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_2 \end{array}\right.$$

Pour $a = 1$ et $b = c = 0$, le système n'a pas de solution à cause de sa troisième ligne.

La matrice A n'est donc pas inversible.

Remarque : Un autre manière de le voir est de constater que les membres de gauches des deux avant-dernières équations sont proportionnels sans que ne le soit leur membre de droite.