Systèmes linéaires

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 18

Sommaire I

Avant de rentrer
dans le vif du sujet en algèbre linéaire, un chapitre plus orienté calcul.
Il s'agit voir le lien entre les matrices et les systèmes d'équations linéaires, pour lesquels nous verrons une méthode de résolution systématique.

I. Systèmes linéaires et matrices

1. **Systèmes linéaires et matrices**
   - Écriture matricielle d'un système linéaire
   - Systèmes équivalents et opérations élémentaires
   - Systèmes échelonnés
2. **Résolution pratique**
3. **Ensemble des solutions**
4. **Systèmes linéaires et matrices inversibles**

Définition 1 (Système linéaire) :

On appelle système linéaire à m équations et n inconnues x_1, x_2, ...x_n tout système $(\mathcal{S})$ de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \dots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}\right. \qquad (\mathcal{S})$$

Définition I (Système linéaire) :

On appelle système linéaire à m équations et n inconnues x_1, x_2, ...x_n tout système $(\mathcal{S})$ de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \dots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}\right. \qquad (\mathcal{S})$$

En posant $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$, le système $(\mathcal{S})$ s'écrit alors sous la forme

Définition 1 (Système linéaire) :

On appelle système linéaire à m équations et n inconnues x_1, x_2, ...x_n tout système $(\mathcal{S})$ de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \dots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}\right. \qquad (\mathcal{S})$$

$$\mathrm{AX} = \mathrm{B}. \qquad (\mathcal{S})$$

Remarques et Vocabulaire :

- La matrice A s'appelle la matrice du système et on considère parfois sa matrice, dite augmentée,

$$\tilde{\mathrm{A}} = \left(\mathrm{A}|\mathrm{B}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{2,m} & b_m \end{array}\right).$$

Remarques et Vocabulaire :

- La matrice A s'appelle la matrice du système et on considère parfois sa matrice, dite augmentée,

$$\tilde{\mathrm{A}} = \Big(\mathrm{A}|\mathrm{B}\Big) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{2,m} & b_m \end{array}\right).$$

- On identifie $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *i.e.* on confond usuellement le vecteur ligne d'inconnue

$$\Big(x_1, x_2, \cdots, x_n\Big) \in \mathbb{K}^n \text{ avec la colonne } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Exemples 1 :

- Le système 2×2, $\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 5 \\ 5x & - & 4y & = & 1 \end{array} \right.$ s'écrit sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

I. Systèmes linéaires et matrices

1. Écriture matricielle d'un système linéaire

Exemples 1 :

- Le système 2×2, $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 5 \\ 5x & - & 4y & = & 1 \end{array}\right.$ s'écrit sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- De même, le système 2×3 :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 4x & + & 5y & & & = & 1 \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exemples I :

- Le système 2×2, $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 5 \\ 5x & - & 4y & = & 1 \end{array}\right.$ s'écrit sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- De même, le système 2×3 :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 4x & + & 5y & & & = & 1 \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Et le système 3×2 :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & 5 \\ 3x & - & 4y & = & 1 \\ -5x & + & 6y & = & 1 \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 2 :

On conserve les notations de la définition (1) .

- On dit que le système $(\mathcal{S})$ est homogène si $\mathrm{B} = (0)_{\mathbb{K}^m}$ et on note $(\mathcal{S}_0)$ le système homogène associé à $(\mathcal{S})$ obtenu en remplaçant B par $(0)_{\mathbb{K}^m}$.

Définition 2 :

On conserve les notations de la définition (1) .

- On dit que le système $(\mathcal{S})$ est homogène si $\mathrm{B} = (0)_{\mathbb{K}^m}$ et on note $(\mathcal{S}_0)$ le système homogène associé à $(\mathcal{S})$ obtenu en remplaçant B par $(0)_{\mathbb{K}^m}$.
- Résoudre le système $(\mathcal{S})$ c'est trouver l'ensemble des vecteurs $\mathrm{X} \in \mathbb{K}^n$ vérifiant $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$. Le système est alors dit compatible dans ce cas, incompatible sinon.

Définition 2 :

On conserve les notations de la définition (1) .

- On dit que le système $(\mathcal{S})$ est homogène si $\mathrm{B} = (0)_{\mathbb{K}^m}$ et on note $(\mathcal{S}_0)$ le système homogène associé à $(\mathcal{S})$ obtenu en remplaçant B par $(0)_{\mathbb{K}^m}$.
- Résoudre le système $(\mathcal{S})$ c'est trouver l'ensemble des vecteurs $\mathrm{X} \in \mathbb{K}^n$ vérifiant $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$. Le système est alors dit compatible dans ce cas, incompatible sinon.
- Deux systèmes sont dits équivalents lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.

Définition 2 :

On conserve les notations de la définition (1) .

- On dit que le système $(\mathcal{S})$ est homogène si $\mathrm{B} = (0)_{\mathbb{K}^m}$ et on note $(\mathcal{S}_0)$ le système homogène associé à $(\mathcal{S})$ obtenu en remplaçant B par $(0)_{\mathbb{K}^m}$.
- Résoudre le système $(\mathcal{S})$ c'est trouver l'ensemble des vecteurs $\mathrm{X} \in \mathbb{K}^n$ vérifiant $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$. Le système est alors dit compatible dans ce cas, incompatible sinon.
- Deux systèmes sont dits équivalents lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.

Remarques :

- Tout système homogène admet, au moins, le vecteur nul comme solution.

Définition 2 :

On conserve les notations de la définition (1) .

- On dit que le système $(\mathcal{S})$ est homogène si $\mathrm{B} = (0)_{\mathbb{K}^m}$ et on note $(\mathcal{S}_0)$ le système homogène associé à $(\mathcal{S})$ obtenu en remplaçant B par $(0)_{\mathbb{K}^m}$.
- Résoudre le système $(\mathcal{S})$ c'est trouver l'ensemble des vecteurs $\mathrm{X} \in \mathbb{K}^n$ vérifiant $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$. Le système est alors dit compatible dans ce cas, incompatible sinon.
- Deux systèmes sont dits équivalents lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.

Remarques :

- Tout système homogène admet, au moins, le vecteur nul comme solution.
- $\emptyset$ est un ensemble solution tout à fait acceptable.

Exemples 2 :

- Les systèmes $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & & & = & 1 \\ -3x & + & 6y & + & z & = & -2 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+2\lambda \\ y & = & \lambda \\ z & = & 1 \end{array}\right.$ sont équivalents.

Exemples 2 :

- Les systèmes $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & & & = & 1 \\ -3x & + & 6y & + & z & = & -2 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+2\lambda \\ y & = & \lambda \\ z & = & 1 \end{array}\right.$ sont équivalents.
- $(1\,;0\,;1)$, $(-1\,;-1\,;1)$ et, plus généralement $(1+2t\,;t\,;1)$ pour $t \in \mathbb{R}$ sont solution des systèmes précédents qui admettent donc une infinité de triplets solutions.

Exemples 2 :

- Les systèmes $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & & & = & 1 \\ -3x & + & 6y & + & z & = & -2 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+2\lambda \\ y & = & \lambda \\ z & = & 1 \end{array}\right.$ sont équivalents.
- $(1\,;0\,;1)$, $(-1\,;-1\,;1)$ et, plus généralement $(1+2t\,;t\,;1)$ pour $t \in \mathbb{R}$ sont solution des systèmes précédents qui admettent donc une infinité de triplets solutions.
- $\left\{\begin{array}{rcr} 3x-5y & = & 1 \\ -6x+10y & = & -2 \end{array}\right.$ admet tout couple de réels $(x\,;y)$ comme solution.

Exemples 2 :

- Les systèmes $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & & & = & 1 \\ -3x & + & 6y & + & z & = & -2 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 1+2\lambda \\ y & = & \lambda \\ z & = & 1 \end{array}\right.$ sont équivalents.
- $(1\,;0\,;1)$, $(-1\,;-1\,;1)$ et, plus généralement $(1+2t\,;t\,;1)$ pour $t \in \mathbb{R}$ sont solution des systèmes précédents qui admettent donc une infinité de triplets solutions.
- $\left\{\begin{array}{rcr} 3x-5y & = & 1 \\ -6x+10y & = & -2 \end{array}\right.$ admet tout couple de réels $(x\,;y)$ comme solution.
- $\left\{\begin{array}{rcr} 3x-5y & = & 1 \\ -6x+10y & = & 1 \end{array}\right.$ est incompatible.

Exemples 2 :

- Les systèmes $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & & & = & 1 \\ -3x & + & 6y & + & z & = & -2 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+2\lambda \\ y & = & \lambda \\ z & = & 1 \end{array}\right.$ sont équivalents.
- $(1\,;0\,;1)$, $(-1\,;-1\,;1)$ et, plus généralement $(1+2t\,;t\,;1)$ pour $t \in \mathbb{R}$ sont solution des systèmes précédents qui admettent donc une infinité de triplets solutions.
- $\left\{\begin{array}{rcr} 3x-5y & = & 1 \\ -6x+10y & = & -2 \end{array}\right.$ admet tout couple de réels $(x\,;y)$ comme solution.
- $\left\{\begin{array}{rcr} 3x-5y & = & 1 \\ -6x+10y & = & 1 \end{array}\right.$ est incompatible.
- $\left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & 3 \\ & y & & = & 1 \\ & & z & = & 0 \end{array}\right.$ admet $(3\,;1\,;0)$ comme unique solution. La matrice associée à ce système est l'identité.

Soient $n \in \mathbb{N}$, i, $j \in [\![1\,;n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note :

- $$\mathrm{L}_{i,j,n} = \begin{array}{cc}
\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 &&&& 1 &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& \ddots &&&&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 &&&& 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{array}\right)
& \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccccccc} &&& \uparrow i &&&& \uparrow j &&& \end{array} &
\end{array}$$

Soient $n \in \mathbb{N}$, i, $j \in [\![1\,;n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note :

- $$\mathrm{H}_{i,n}(\lambda)=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& \lambda &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} &&& \uparrow \\ &&& i &&& \end{array} & \end{array}$$

Soient $n \in \mathbb{N}$, i, $j \in [\![1\,;n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note :

- $$\mathrm{T}_{i,j,n}(\lambda) = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & \lambda & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & \uparrow j & & & & \end{array} & \end{array}$$

Proposition 1 (Effet d'une matrice d'opérations élémentaires sur les lignes) :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Multiplier A par $\mathrm{L}_{i,j,n}$ à gauche revient à permuter les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lignes de A.
  On note $\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$ cette opération.

Proposition 1 (Effet d'une matrice d'opérations élémentaires sur les lignes) :

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Multiplier A par $\mathrm{L}_{i,j,n}$ à gauche revient à permuter les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lignes de A.
  On note $\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$ cette opération.
- Multiplier A par $\mathrm{H}_{i,n}(\lambda)$ à gauche revient à multiplier la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par λ.
  On note $\mathrm{L}_i \leftarrow \lambda \mathrm{L}_i$ cette opération.

Proposition 1 (Effet d'une matrice d'opérations élémentaires sur les lignes) :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Multiplier A par $L_{i,j,n}$ à gauche revient à permuter les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lignes de A.
  On note $L_i \leftrightarrow L_j$ cette opération.
- Multiplier A par $H_{i,n}(\lambda)$ à gauche revient à multiplier la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par λ.
  On note $L_i \leftarrow \lambda L_i$ cette opération.
- Multiplier A par $T_{i,j,n}(\lambda)$ à gauche revient à additionner la $j^{\text{ème}}$ ligne de A multipliée par λ à la $i^{\text{ème}}$ (avec $i \neq j$).
  On note $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ cette opération.

Vocabulaire :

- Les matrices $\mathrm{L}_{i,j,n}$ s'appellent des matrices de permutation.

Vocabulaire :

- Les matrices $\mathrm{L}_{i,j,n}$ s'appellent des matrices de permutation.
- Les matrices $\mathrm{H}_{i,n}$ s'appellent des matrices de dilatation.

Vocabulaire :

- Les matrices $\mathrm{L}_{i,j,n}$ s'appellent des matrices de permutation.
- Les matrices $\mathrm{H}_{i,n}$ s'appellent des matrices de dilatation.
- Les matrices $\mathrm{T}_{i,j,n}$ s'appellent des matrices de transvection.

De même à droite avec les colonnes :

Proposition 2 (Effet d'une matrice d'opérations élémentaires sur les colonnes) :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Multiplier A par $L_{i,j,p}$ à droite revient à permuter les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ colonnes de A.
  On note $C_i \leftrightarrow C_j$ cette opération.
- Multiplier A par $H_{i,p}(\lambda)$ à droite revient à multiplier la $i^{\text{ème}}$ colonne de A par λ.
  On note $C_i \leftarrow \lambda C_i$ cette opération.
- Multiplier A par $T_{i,j,p}(\lambda)$ à droite revient à additionner la $j^{\text{ème}}$ colonne de A multipliée par λ à la $i^{\text{ème}}$ (avec $i \neq j$).
  On note $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ cette opération.

Définition 3 (Opérations élémentaires sur les lignes) :

On appelle opérations élémentaires sur les lignes d'un système, les opérations ci-dessous :

Permutation : $\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$, permuter les lignes i et j

Effectuer de telles opérations sur un système revient donc à multiplier la matrice augmentée du système à gauche par les matrices d'opérations élémentaires correspondantes.

Définition 3 (Opérations élémentaires sur les lignes) :

On appelle opérations élémentaires sur les lignes d'un système, les opérations ci-dessous :

Permutation : $\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$, permuter les lignes i et j

Dilatation ($\lambda \neq 0$) : $\mathrm{L}_i \leftarrow \lambda \mathrm{L}_i$, multiplier la ligne i par λ.

Effectuer de telles opérations sur un système revient donc à multiplier la matrice augmentée du système à gauche par les matrices d'opérations élémentaires correspondantes.

Définition 3 (Opérations élémentaires sur les lignes) :

On appelle opérations élémentaires sur les lignes d'un système, les opérations ci-dessous :

Permutation : $\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$, permuter les lignes i et j

Dilatation ($\lambda \neq 0$) : $\mathrm{L}_i \leftarrow \lambda \mathrm{L}_i$, multiplier la ligne i par λ.

Transvection : $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \lambda \mathrm{L}_j$ et, par extension, $\mathrm{L}_i \leftarrow \mu \mathrm{L}_i + \lambda \mathrm{L}_j$, remplacer la ligne i par une combinaison linéaire des lignes i et j.

Effectuer de telles opérations sur un système revient donc à multiplier la matrice augmentée du système à gauche par les matrices d'opérations élémentaires correspondantes.

Théorème 3 :

1. Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrices sont bijectives.

Théorème 3 :

1. Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrices sont bijectives.
2. Deux systèmes linéaires qui se déduisent l'un de l'autre par un nombre fini d'opérations élémentaires sur les **lignes** sont équivalents.
   On note généralement :

$$(\mathcal{S}) \sim_{\mathrm{L}} (\mathcal{S}), \qquad \tilde{\mathrm{A}} \sim_{\mathrm{L}} \tilde{\mathrm{A}}' \quad \text{ou} \quad \mathrm{A} \sim_{\mathrm{L}} \mathrm{A}'.$$

Théorème 3 :

1. Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrices sont bijectives.
2. Deux systèmes linéaires qui se déduisent l'un de l'autre par un nombre fini d'opérations élémentaires sur les **lignes** sont équivalents.
   On note généralement :

$$(\mathcal{S}) \sim_{\mathrm{L}} (\mathcal{S}), \qquad \tilde{\mathrm{A}} \sim_{\mathrm{L}} \tilde{\mathrm{A}}' \quad \text{ou} \quad \mathrm{A} \sim_{\mathrm{L}} \mathrm{A}'.$$

Remarque : L'équivalence par ligne est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Théorème 3 :

1. Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrices sont bijectives.
2. Deux systèmes linéaires qui se déduisent l'un de l'autre par un nombre fini d'opérations élémentaires sur les **lignes** sont équivalents.
   On note généralement :

$$(\mathcal{S}) \sim_{\mathrm{L}} (\mathcal{S}), \qquad \tilde{\mathrm{A}} \sim_{\mathrm{L}} \tilde{\mathrm{A}}' \quad \text{ou} \quad \mathrm{A} \sim_{\mathrm{L}} \mathrm{A}'.$$

Remarque : L'équivalence par ligne est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

D'un point de vue matriciel,

Corollaire 1 :

Les matrices de permutation et de transvection ainsi que celles de dilatation pour $\lambda \neq 0$ sont inversibles.

Méthode 1 :

- Il revient au même de travailler par opérations élémentaires sur le système ou sur sa matrice augmentée. On notera $\tilde{\mathrm{M}} \sim_{\mathrm{O}} \tilde{\mathrm{M}}'$ pour préciser l'opération O effectuée sur les lignes.

Méthode 1 :

- Il revient au même de travailler par opérations élémentaires sur le système ou sur sa matrice augmentée. On notera $\tilde{\mathrm{M}} \sim_{\mathrm{O}} \tilde{\mathrm{M}}'$ pour préciser l'opération O effectuée sur les lignes.
- Travailler sur la matrice permet d'avoir des notations plus concises tout en conservant toutes les informations nécessaires à la résolution.

Méthode 1 :

- Il revient au même de travailler par opérations élémentaires sur le système ou sur sa matrice augmentée. On notera $\tilde{\mathrm{M}} \sim_{\mathrm{O}} \tilde{\mathrm{M}}'$ pour préciser l'opération O effectuée sur les lignes.
- Travailler sur la matrice permet d'avoir des notations plus concises tout en conservant toutes les informations nécessaires à la résolution.
- Dans le cas des systèmes homogènes, il suffit de travailler sur la matrice A au lieu de la matrice augmentée $\tilde{\mathrm{A}} = (\mathrm{A} \mid 0)$ car les opérations élémentaires laissent la colonne du second membre invariante à 0.

Exemple 3 :

Résolution d'un système linéaire à l'aide d'opérations élémentaires sur ses lignes.

$$(\mathcal{S}_3) : \left\{\begin{array}{rcr} x+3y-z & = & -6 \\ 2x+5y+z & = & 4 \\ 3x \quad +2z & = & 16 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrl} x+3y-z & = & -6 & \\ -y+3z & = & 16 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2-2\mathrm{L}_1 \\ -9y+5z & = & 34 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3-3\mathrm{L}_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrl} x+3y-z & = & -6 & \\ -y+3z & = & 16 & \\ -22z & = & -110 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3-9\mathrm{L}_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrl} x+3y-z & = & -6 & \\ -y+3z & = & 16 & \\ z & = & 5 & \mathrm{L}_3 \leftarrow -\dfrac{1}{22}\mathrm{L}_3 \end{array}\right.$$

On dit qu'on a échelonné le système (disposition en escalier). Ce dernier système est très facile à résoudre, et le théorème (3) permet d'affirmer qu'il a le même ensemble de solutions que $(\mathcal{S}_3)$.

Exemple 4 :

On peut choisir de travailler en matrice augmentée.

Pour le système de l' exemple (3) , on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -6 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 16 \end{array}\right) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & 16 \\ 0 & -9 & 5 & 34 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_2 - 3L_1 \end{array}$$

$$\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & -22 & -110 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 9L_2$$

$$\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow -\frac{1}{22}L_3$$

On dit que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est échelonnée par lignes.

L'idée : Si la matrice du système est diagonale *i.e.* si le système linéaire associé s'écrit :

$$(\mathcal{S}) : \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} \alpha_1 x_1 & & & = & b_1 \\ & \alpha_2 x_2 & & = & b_2 \\ & & \ddots & = & \vdots \\ & & \quad \alpha_n x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

i.e. si le système est dit échelonné réduit, il est facile de le résoudre.

En effet, ici, on aura très facilement et à l'unique condition que $\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]$, $\alpha_i \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{\alpha_1} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{\alpha_n} \end{pmatrix}.$$

Proposition 4 :

Un système diagonal $(\alpha_i x_i = b_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est compatible si, et seulement si :

$$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\,,\ \alpha_i = 0 \implies b_i = 0.$$

Sous ces conditions, il se résout en divisant par α_i le cas échéant.

Définition 4 (Système triangulaire supérieur) :

Un système $(\mathcal{S})$ est dit triangulaire supérieur si sa matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure :

$$\forall\, ij \in [\![1\,;n]\!]\,,\quad i > j \implies a_{ij} = 0.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\
 & & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\
 & & & \ddots & & & \vdots & = & \vdots \\
 & & & & a_{n-1,n-1}x_{n-1} & + & a_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\
 & & & & & & a_{n,n}x_n & = & b_n
\end{array}\right.$$

Méthode 2 :

Pour résoudre de tels systèmes, on procède par « remontée » :

1. L_n est de la forme $a_{n,n}x_n = b_n$ et permet d'exprimer x_n si $a_{n,n} \neq 0$. On peut alors éliminer l'inconnue x_n des lignes 1 à $n-1$ par soustraction.

Méthode 2 :

Pour résoudre de tels systèmes, on procède par « remontée » :

1. L_n est de la forme $a_{n,n}x_n = b_n$ et permet d'exprimer x_n si $a_{n,n} \neq 0$. On peut alors éliminer l'inconnue x_n des lignes 1 à $n-1$ par soustraction.
2. La nouvelle ligne $n-1$ est de la forme $\mathrm{L}_{n-1} : a_{n-1,n-1}x_{n-1} = b'_{n-1}$ permet d'exprimer x_{n-1} en fonction de b'_{n-1} si $a_{n-1,n-1} \neq 0$ et d'éliminer x_{n-1} des lignes 1 à $n-2$.

Méthode 2 :

Pour résoudre de tels systèmes, on procède par « remontée » :

1. L_n est de la forme $a_{n,n}x_n = b_n$ et permet d'exprimer x_n si $a_{n,n} \neq 0$. On peut alors éliminer l'inconnue x_n des lignes 1 à $n-1$ par soustraction.
2. La nouvelle ligne $n-1$ est de la forme $\mathrm{L}_{n-1} : a_{n-1,n-1}x_{n-1} = b'_{n-1}$ permet d'exprimer x_{n-1} en fonction de b'_{n-1} si $a_{n-1,n-1} \neq 0$ et d'éliminer x_{n-1} des lignes 1 à $n-2$.

   ...

Méthode 2 :

Pour résoudre de tels systèmes, on procède par « remontée » :

1. L_n est de la forme $a_{n,n}x_n = b_n$ et permet d'exprimer x_n si $a_{n,n} \neq 0$. On peut alors éliminer l'inconnue x_n des lignes 1 à $n-1$ par soustraction.
2. La nouvelle ligne $n-1$ est de la forme $\mathrm{L}_{n-1} : a_{n-1,n-1}x_{n-1} = b'_{n-1}$ permet d'exprimer x_{n-1} en fonction de b'_{n-1} si $a_{n-1,n-1} \neq 0$ et d'éliminer x_{n-1} des lignes 1 à $n-2$.

   ...

3. On traite ainsi successivement les lignes par ordre décroissant.

Méthode 2 :

Pour résoudre de tels systèmes, on procède par « remontée » :

1. L_n est de la forme $a_{n,n}x_n = b_n$ et permet d'exprimer x_n si $a_{n,n} \neq 0$. On peut alors éliminer l'inconnue x_n des lignes 1 à $n-1$ par soustraction.
2. La nouvelle ligne $n-1$ est de la forme $\mathrm{L}_{n-1} : a_{n-1,n-1}x_{n-1} = b'_{n-1}$ permet d'exprimer x_{n-1} en fonction de b'_{n-1} si $a_{n-1,n-1} \neq 0$ et d'éliminer x_{n-1} des lignes 1 à $n-2$.

   ...
3. On traite ainsi successivement les lignes par ordre décroissant.
4. Si un coefficient diagonal $a_{i,i}$ est nul, il faut examiner la compatibilité de la i-ème ligne qui doit être une équation de la forme $0 = 0$, sinon le système n'a pas de solution.

Méthode 2 :

Pour résoudre de tels systèmes, on procède par « remontée » :

1. L_n est de la forme $a_{n,n}x_n = b_n$ et permet d'exprimer x_n si $a_{n,n} \neq 0$. On peut alors éliminer l'inconnue x_n des lignes 1 à $n-1$ par soustraction.
2. La nouvelle ligne $n-1$ est de la forme $\mathrm{L}_{n-1} : a_{n-1,n-1}x_{n-1} = b'_{n-1}$ permet d'exprimer x_{n-1} en fonction de b'_{n-1} si $a_{n-1,n-1} \neq 0$ et d'éliminer x_{n-1} des lignes 1 à $n-2$.

   ...
3. On traite ainsi successivement les lignes par ordre décroissant.
4. Si un coefficient diagonal $a_{i,i}$ est nul, il faut examiner la compatibilité de la i-ème ligne qui doit être une équation de la forme $0 = 0$, sinon le système n'a pas de solution.
5. On finit par traiter une $1^{\text{ère}}$ ligne de la forme $\widetilde{\mathrm{L}}_1 : a_{1,1}x_1 = \tilde{b}_1$.

Exemple 5 :

Reprenons le système de l' exemple (3) :

$$(\mathcal{S}_3) : \left\{\begin{array}{rcr} x+3y-z &=& -6 \\ -y+3z &=& 16 \\ z &=& 5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{llcr} x & +3y & = & -1 \\ & -y & = & 1 \\ & \quad z & = & 5 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 3\mathrm{L}_3 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{llcr} x & & = & 2 \\ & -y & = & 1 \\ & \quad z & = & 5 \end{array}\right. \quad \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + 3\mathrm{L}_2$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcr} x &=& 2 \\ y &=& -1 \\ z &=& 5. \end{array}\right. \quad \text{et} \quad (\mathcal{S}_3) = \left\{\,(2\,;-1\,;5)\,\right\}.$$

Exemple 6 :

À partir de la matrice augmentée de l' exemple (4) , on obtient également :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{array}$$

$$\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2$$

$$\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow -L_2$$

Cette matrice correspond au système diagonal $\left\{\begin{array}{cccrr} x & & & = & 2 \\ & y & & = & -1 \\ & & z & = & 5 \end{array}\right.$ dont l'ensemble des solutions est transparent !

On dit que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est échelonnée réduite par lignes.

Exercice 1 :

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ \quad\quad 2x_2 - 6x_3 = 4 \\ \quad\quad\quad\quad 3x_3 = 6 \end{cases}$

Exercice 1 :

Résoudre les systèmes suivants :

1. $$\left\{\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_2 - 6x_3 &= 4 \\ 3x_3 &= 6 \end{aligned}\right.$$

2. $$\left\{\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 1 \\ -2x_3 &= 4 \\ -3x_3 &= 6 \end{aligned}\right.$$

Exercice 1 :

Résoudre les systèmes suivants :

1. $$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ \phantom{x_1 + {}} 2x_2 - 6x_3 = 4 \\ \phantom{x_1 + 4x_2 + {}} 3x_3 = 6 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_3 = 4 \\ -3x_3 = 6 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_3 = 5 \\ -3x_3 = 6 \end{cases}$$

Les systèmes diagonaux ou triangulaires sont des cas particuliers de systèmes, dits échelonnés :

Définition 5 (Pivot, système échelonné) :

- Dans un système linéaire ou une matrice, on appelle pivot d'une ligne non nulle le premier de ses coefficients non nuls.

Les systèmes diagonaux ou triangulaires sont des cas particuliers de systèmes, dits échelonnés :

Définition 5 (Pivot, système échelonné) :

- Dans un système linéaire ou une matrice, on appelle pivot d'une ligne non nulle le premier de ses coefficients non nuls.
- On dit que $(\mathcal{S})$ est échelonné par lignes lorsque :

Les systèmes diagonaux ou triangulaires sont des cas particuliers de systèmes, dits échelonnés :

Définition 5 (Pivot, système échelonné) :

- Dans un système linéaire ou une matrice, on appelle pivot d'une ligne non nulle le premier de ses coefficients non nuls.
- On dit que $(\mathcal{S})$ est échelonné par lignes lorsque :
  1. Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi.

Les systèmes diagonaux ou triangulaires sont des cas particuliers de systèmes, dits échelonnés :

Définition 5 (Pivot, système échelonné) :

- Dans un système linéaire ou une matrice, on appelle pivot d'une ligne non nulle le premier de ses coefficients non nuls.
- On dit que $(\mathcal{S})$ est échelonné par lignes lorsque :
  1. Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi.
  2. À partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le pivot a un indice de colonne strictement à supérieur à celui de la ligne précédente.

Les systèmes diagonaux ou triangulaires sont des cas particuliers de systèmes, dits échelonnés :

Définition 5 (Pivot, système échelonné) :

- Dans un système linéaire ou une matrice, on appelle pivot d'une ligne non nulle le premier de ses coefficients non nuls.
- On dit que $(\mathcal{S})$ est échelonné par lignes lorsque :
  1. Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi.
  2. À partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le pivot a un indice de colonne strictement à supérieur à celui de la ligne précédente.
- Dans un système échelonné, on dit qu'une inconnue est

Les systèmes diagonaux ou triangulaires sont des cas particuliers de systèmes, dits échelonnés :

Définition 5 (Pivot, système échelonné) :

- Dans un système linéaire ou une matrice, on appelle pivot d'une ligne non nulle le premier de ses coefficients non nuls.
- On dit que $(\mathcal{S})$ est échelonné par lignes lorsque :
  1. Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi.
  2. À partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le pivot a un indice de colonne strictement à supérieur à celui de la ligne précédente.
- Dans un système échelonné, on dit qu'une inconnue est
  - principale si son coefficient est un pivot sur une des lignes du système ;

Les systèmes diagonaux ou triangulaires sont des cas particuliers de systèmes, dits échelonnés :

Définition 5 (Pivot, système échelonné) :

- Dans un système linéaire ou une matrice, on appelle pivot d'une ligne non nulle le premier de ses coefficients non nuls.
- On dit que $(\mathcal{S})$ est échelonné par lignes lorsque :
  1. Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi.
  2. À partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le pivot a un indice de colonne strictement à supérieur à celui de la ligne précédente.
- Dans un système échelonné, on dit qu'une inconnue est
  - principale si son coefficient est un pivot sur une des lignes du système ;
  - secondaire sinon.

Exemples 7 (Systèmes échelonnés) :

1. $$\left\{\begin{array}{rrrrcl} 1\,x & 2y & -z & +2t & = & 4 \\ & -1\,y & +2z & & = & 3 \\ & & & 5\,t & = & 1 \end{array}\right.$$

Exemples 7 (Systèmes échelonnés) :

1. $$\left\{\begin{array}{cccccc} 1x & 2y & -z & +2t & = & 4 \\ & -1y & +2z & & = & 3 \\ & & & 5t & = & 1 \end{array}\right.$$

2. $$\left\{\begin{array}{ccc} 5x+y+2t-u & = & -2 \\ 2u & = & 3 \end{array}\right.$$

Exemples 7 (Systèmes échelonnés) :

1. $$\left\{\begin{array}{cccccc} 1x & 2y & -z & +2t & = & 4 \\ & -1y & +2z & & = & 3 \\ & & & 5t & = & 1 \end{array}\right.$$

2. $$\left\{\begin{array}{ccc} 5x+y+2t-u & = & -2 \\ 2u & = & 3 \end{array}\right.$$

3. $$\left\{ 1x+y+2z-1t = 2 \right.$$

Exemples 7 (Systèmes échelonnés) :

1. $$\left\{\begin{array}{cccccc} 5x & +y & & +2t & -u & = -2 \\ & 1y & +z & -t & 3u & = 3 \\ & & 3z & -2t & +5u & = 6 \\ & & & & -1u & = 1 \end{array}\right.$$

2. $$\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & & & & = 1 \\ & -3y & & & = 3 \\ & & 1z & & = 6 \\ & & & -6u & = 12 \end{array}\right.$$ Ce système est dit échelonné réduit.

Exemples 8 (Systèmes non échelonnés) :

1. $\left\{\begin{array}{cccccc} x & 2y & -z & +2t & = & 4 \\ x & -y & & 2t & = & 3 \\ & & & 5t & = & 1 \end{array}\right.$

Exemples 8 (Systèmes non échelonnés) :

1. $$\left\{\begin{array}{cccccc} x & 2y & -z & +2t & = & 4 \\ x & -y & & 2t & = & 3 \\ & & & 5t & = & 1 \end{array}\right.$$

2. $$\left\{\begin{array}{rcr} 5x + y + 2t - u & = & -2 \\ -4y + t - 2u & = & 3 \\ 5y + 2t + u & = & 0 \end{array}\right.$$

Exemples 8 (Systèmes non échelonnés) :

1. $$\left\{\begin{array}{cccccc} x & 2y & -z & +2t & = & 4 \\ x & -y & & 2t & = & 3 \\ & & & 5t & = & 1 \end{array}\right.$$

2. $$\left\{\begin{array}{rcc} 5x+y+2t-u & = & -2 \\ -4y+t-2u & = & 3 \\ 5y+2t+u & = & 0 \end{array}\right.$$

3. $$\left\{\begin{array}{ccccccc} 5x & +y & & +2t & -u & = & -2 \\ & y & +z & -t & +3u & = & 3 \\ & & 3z & -2t & +5u & = & 6 \\ & & z & +t & & = & -1 \\ & & & -t & & = & 1 \end{array}\right.$$

II. Résolution pratique

1. Algorithme de Gauss

L'objectif de l'algorithme de Gauss est donc de transformer tout système linéaire en un système échelonné **équivalent** par des opérations élémentaires décrites au paragraphe (2) .

Considérons un système quelconque où chaque point $\bullet$ représente un coefficient du système, éventuellement 0.

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

Nous allons faire disparaître progressivement ces coefficients en les annulant et obtenir finalement la forme échelonnée du système étudié.

Étape 1 : On choisit dans le système un coefficient non nul $\checkmark$ appelé pivot. Bien sûr, si tous les coefficients sont nuls, le système est résolu ! S'il n'y est pas déjà, on peut toujours placer ce pivot en position $(1, 1)$ en permutant deux équations et/ou deux inconnues. Le système initial :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right. \quad \text{devient} \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

après une éventuelle opération $\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$ et un éventuel échange d'inconnues.

ATTENTION

Permuter les inconnues n'est pas une opération élémentaire sur les colonnes, mais simplement une réindexation.

Étape 2 : Grâce au pivot, on annule par des opérations $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i - \lambda_i \mathrm{L}_1$ ou $\mathrm{L}_i \leftarrow \lambda_1 \mathrm{L}_i - \lambda_i \mathrm{L}_1$ tous les coefficients de la première colonne sous le pivot.
Le système devient :

$$\left\{\begin{array}{cccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

Remarque : Évitez les divisions et si une ligne nulle apparaît à cette étape, on la supprime sans ménagement.

Reprise des étapes 1 et 2 : On reprend les étapes 1 et 2 avec le sous-système obtenu par oubli de la ligne 1.
Le système :

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \checkmark & \bullet & = & \bullet \end{array}\right. \quad \text{devient} \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

$$\text{puis} \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

Et on recommence : On poursuit l'algorithme jusqu'à la $m^{\text{ème}}$ ligne ou jusqu'à n'avoir que des lignes nulles.
Le résultat final est appelé une forme échelonnée du système :

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

Remontée : On annule à présent tous les coefficients situés au-dessus des symboles $\checkmark$.
La méthode est la même que précédemment, on utilise les pivots et des opérations $\mathrm{L}_i \leftarrow \lambda_j \mathrm{L}_i + \lambda_i \mathrm{L}_j$.
Le système échelonné devient :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right. \text{ puis } \left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

$$\text{et } \left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

Remontée : On annule à présent tous les coefficients situés au-dessus des symboles $\checkmark$.
La méthode est la même que précédemment, on utilise les pivots et des opérations $\mathrm{L}_i \leftarrow \lambda_j \mathrm{L}_i + \lambda_i \mathrm{L}_j$.
Le système échelonné devient :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right. \text{ puis } \left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & \bullet & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

$$\text{et } \left\{\begin{array}{ccccccc} \checkmark & & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & \checkmark & & \bullet & \bullet & = & \bullet \\ & & \checkmark & \bullet & \bullet & = & \bullet \end{array}\right.$$

Et c'est fini ! Sur l'exemple choisi, on peut exprimer les inconnues principales 1, 2 et 3 en fonction des inconnues secondaires 4 et 5, ce qui achève la résolution du système.

Exemple 9 :

$$(\mathcal{S}_9) : \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 3z & + & t & = & 3 \\ x & - & 2y & + & 3z & - & t & = & 0 \end{array} \right.$$

Exemple 9 :

$$(\mathcal{S}_9) : \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 3z & + & t & = & 3 \\ x & - & 2y & + & 3z & - & t & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff}$$

Exemple 9 :

$$(\mathcal{S}_9) : \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 3z & + & t & = & 3 \\ x & - & 2y & + & 3z & - & t & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ & & y & + & z & - & t & = & -1 \\ & - & y & + & 2z & - & 2t & = & -2 \end{array} \right.$$

Exemple 9 :

$$
(\mathcal{S}_9):\quad \left\{\begin{array}{ccccccccc}
x & - & y & + & z & + & t & = & 2\\
2x & - & y & + & 3z & + & t & = & 3\\
x & - & 2y & + & 3z & - & t & = & 0
\end{array}\right.
$$

$$
\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\Longleftrightarrow}\quad \left\{\begin{array}{ccccccccc}
x & - & y & + & z & + & t & = & 2\\
 & & y & + & z & - & t & = & -1\\
 & - & y & + & 2z & - & 2t & = & -2
\end{array}\right.
$$

$$
\underset{L_3\leftarrow \frac{1}{3}(L_3+L_2)}{\Longleftrightarrow}\quad \left\{\begin{array}{ccccccccc}
x & - & y & + & z & + & t & = & 2\\
 & & y & + & z & - & t & = & -1\\
 & & & & z & - & t & = & -1
\end{array}\right.
$$

Exemple 9 :

$$(\mathcal{S}_9) : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 3z & + & t & = & 3 \\ x & - & 2y & + & 3z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ & & y & + & z & - & t & = & -1 \\ & - & y & + & 2z & - & 2t & = & -2 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{3}(L_3 + L_2)}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ & & y & + & z & - & t & = & -1 \\ & & & & z & - & t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & & & + & 2t & = & 3 \\ & & y & & & & & = & 0 \\ & & & & z & - & t & = & -1 \end{array}\right.$$

Exemple 9 :

$$(\mathcal{S}_9) : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 3z & + & t & = & 3 \\ x & - & 2y & + & 3z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ & & y & + & z & - & t & = & -1 \\ & - & y & + & 2z & - & 2t & = & -2 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{3}(L_3 + L_2)}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ & & y & + & z & - & t & = & -1 \\ & & & & z & - & t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & & & + & 2t & = & 3 \\ & & y & & & & & = & 0 \\ & & & & z & - & t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & & & + & 2t & = & 3 \\ & & y & & & & & = & 0 \\ & & & & z & - & t & = & -1 \end{array}\right.$$

Exemple 9 :

$$(\mathcal{S}_9) : \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 3z & + & t & = & 3 \\ x & - & 2y & + & 3z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2t & = & 3 \\ & y & & & & = & 0 \\ & & z & - & t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & = & 3 & - & 2t \\ y & = & 0 & & \\ z & = & -1 & + & t \\ t & = & & & t \end{array}\right.$$

Exemple 9 :

$$(\mathcal{S}_9) : \quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 3z & + & t & = & 3 \\ x & - & 2y & + & 3z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2t & = & 3 \\ & y & & & & = & 0 \\ & & z & - & t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & = & 3 & - & 2t \\ y & = & 0 & & \\ z & = & -1 & + & t \\ t & = & & & t \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 9 :

$$(\mathcal{S}_9) : \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 3z & + & t & = & 3 \\ x & - & 2y & + & 3z & - & t & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2t & = & 3 \\ & y & & & & = & 0 \\ & & z & - & t & = & -1 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda . \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{K}.$$

Exemple 9 :

$$(\mathcal{S}_9) : \quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & y & + & z & + & t & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 3z & + & t & = & 3 \\ x & - & 2y & + & 3z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2t & = & 3 \\ & y & & & & = & 0 \\ & & z & - & t & = & -1 \end{array}\right.$$

D'un point de vue matriciel, $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim_L \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$.

Méthode 3 :

Pour résoudre un système échelonné :

1. Par remontée, on élimine avec des opérations élémentaires les inconnues principales dans les lignes où elles ne sont pas en position de pivot.

Méthode 3 :

Pour résoudre un système échelonné :

1. Par remontée, on élimine avec des opérations élémentaires les inconnues principales dans les lignes où elles ne sont pas en position de pivot.
2. S'il y a des inconnues secondaires, on les considère comme des paramètres prenant librement toute valeur possible dans $\mathbb{K}$: on exprime les inconnues principales en fonction des ces paramètres.

Méthode 3 :

Pour résoudre un système échelonné :

1. Par remontée, on élimine avec des opérations élémentaires les inconnues principales dans les lignes où elles ne sont pas en position de pivot.
2. S'il y a des inconnues secondaires, on les considère comme des paramètres prenant librement toute valeur possible dans $\mathbb{K}$: on exprime les inconnues principales en fonction des ces paramètres.
3. On rajoute finalement des lignes $x_i = 0 + \cdots + 1 \cdot x_i + \cdots + 0$ pour les inconnues secondaires.

Méthode 3 :

L'ensemble de solutions peut alors s'écrire sous la forme de solutions paramétriques :

$$(\mathcal{S}) = \left\{ \mathrm{X}_p + t_1 \mathrm{X}_1 + t_2 \mathrm{X}_2 + \cdots + t_j \mathrm{X}_j \mid t_1, \ldots, t_j \in \mathbb{K} \right\},$$

où $\mathrm{X}_p \in \mathbb{K}^n$ est une solution particulière de $(\mathcal{S})$, $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_j$ sont les inconnues secondaires.

Méthode 3 :

L'ensemble de solutions peut alors s'écrire sous la forme de solutions paramétriques :

$$(\mathcal{S}) = \left\{ \mathrm{X}_p + t_1\mathrm{X}_1 + t_2\mathrm{X}_2 + \cdots + t_j\mathrm{X}_j \mid t_1, \ldots, t_j \in \mathbb{K} \right\},$$

où $\mathrm{X}_p \in \mathbb{K}^n$ est une solution particulière de $(\mathcal{S})$, $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_j$ sont les inconnues secondaires.

Remarque : Tout vecteur de $\mathbb{K}^n$ de la forme $t_1\mathrm{X}_1 + t_2\mathrm{X}_2 + \cdots + t_j\mathrm{X}_j$ où $t_1, \ldots, t_j \in \mathbb{K}$ est solution du système $(\mathrm{A} \mid 0)$ linéaire homogène associé.

Exemple 10 :

$$(\mathcal{S}_{10}) : \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ x & + & y & + & z & + & 2t & = & 2 \end{array} \right.$$

Exemple 10 :

$$(\mathcal{S}_{10}) : \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ x & + & y & + & z & + & 2t & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\underset{\substack{\mathrm{L}_2 \leftarrow \frac{1}{2}(\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2) \\ \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_4}}{\Longleftrightarrow}$$

Exemple 10 :

$$(\mathcal{S}_{10}) : \quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ x & + & y & + & z & + & 2t & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}(L_1 - L_2) \\ L_4 \leftarrow L_1 - L_4}}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \end{array}\right.$$

Exemple 10 :

$$(\mathcal{S}_{10}) : \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ x & + & y & + & z & + & 2t & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{\mathrm{L}_2 \leftarrow \frac{1}{2}(\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2) \\ \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_4}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \end{array}\right.$$

Exemple 10 :

$$(\mathcal{S}_{10}) : \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ x & + & y & + & z & + & 2t & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}(L_1 - L_2) \\ L_4 \leftarrow L_1 - L_4}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & + & z & + & t & = & 3 \\ & y & & & + & t & = & -1 \end{array}\right.$$

Exemple 10 :

$$(\mathcal{S}_{10}) : \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ x & + & y & + & z & + & 2t & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}(L_1 - L_2) \\ L_4 \leftarrow L_1 - L_4}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \end{array}\right.$$

Exemple 10 :

$$(\mathcal{S}_{10}) : \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ x & + & y & + & z & + & 2t & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\underset{\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - 2\mathrm{L}_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \end{array} \right.$$

D'un point de vue matriciel, $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim_{\mathrm{L}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$.

Exemple 10 :

$$(\mathcal{S}_{10}) : \quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ x & + & y & + & z & + & 2t & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\underset{\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - 2\mathrm{L}_2}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & = & 3 & - & z & - & t \\ y & = & -1 & & & - & t \\ z & = & & & z & & \\ t & = & & & & & t \end{array}\right.$$

Exemple 10 :

$$(\mathcal{S}_{10}) : \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ x & + & y & + & z & + & 2t & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & = & 3 & - & z & - & t \\ y & = & -1 & & & - & t \\ z & = & & & z & & \\ t & = & & & & & t \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z.\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 10 :

$$(\mathcal{S}_{10}) : \quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ x & + & y & + & z & + & 2t & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & = & 3 & - & z & - & t \\ y & = & -1 & & & - & t \\ z & = & & & z & & \\ t & = & & & & & t \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda . \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu . \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ (\lambda ; \mu) \in \mathbb{K}^2.$$

Exercice 2 :

Déterminer l'ensemble des solutions du système linéaire

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 3t & = & 1 \\ x & & & + & z & + & t & = & 3 \\ & & y & & & + & t & = & -1 \\ x & + & y & + & z & + & 2t & = & 2 \end{array}\right.$$

d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Méthode 4 :

1. Un système linéaire échelonné est compatible si, et seulement si il ne comporte pas de pivot sur la colonne des seconds membres *i.e.* un coefficient non nul à droite dans la matrice augmentée du système.
   Le fait de ne pas avoir de pivot sur la colonne du second membre donne lieu à des conditions de compatibilité. (cf. exemple (11))

Méthode 4 :

1. Un système linéaire échelonné est compatible si, et seulement si il ne comporte pas de pivot sur la colonne des seconds membres *i.e.* un coefficient non nul à droite dans la matrice augmentée du système.
   Le fait de ne pas avoir de pivot sur la colonne du second membre donne lieu à des conditions de compatibilité. (cf. exemple (11))
2. Pour un système échelonné compatible, on a l'alternative suivante :

Méthode 4 :

1. Un système linéaire échelonné est compatible si, et seulement si il ne comporte pas de pivot sur la colonne des seconds membres *i.e.* un coefficient non nul à droite dans la matrice augmentée du système.
   Le fait de ne pas avoir de pivot sur la colonne du second membre donne lieu à des conditions de compatibilité. (cf. exemple (11))
2. Pour un système échelonné compatible, on a l'alternative suivante :
   1. Soit il n'a que des inconnues principales et alors il admet une unique solution.

Méthode 4 :

1. Un système linéaire échelonné est compatible si, et seulement si il ne comporte pas de pivot sur la colonne des seconds membres *i.e.* un coefficient non nul à droite dans la matrice augmentée du système.
   Le fait de ne pas avoir de pivot sur la colonne du second membre donne lieu à des conditions de compatibilité. (cf. exemple (11))
2. Pour un système échelonné compatible, on a l'alternative suivante :
   1. Soit il n'a que des inconnues principales et alors il admet une unique solution.
   2. Soit on peut paramétrer l'ensemble des solutions à l'aide des inconnues secondaires et dans ce cas, il possède une infinité de solutions.

Exemples II :

Soit $a \in \mathbb{K}$.

- $(\mathcal{S}) : \begin{cases} x+y+z & = & 4 \\ y-z & = & 2 \\ z & = & a^2+a-2 \end{cases}$ dont la matrice augmentée est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a^2+a-2 \end{array}\right)$ est compatible.

Exemples II :

Soit $a \in \mathbb{K}$.

- $(\mathcal{S}) : \begin{cases} x+y+z &= 4 \\ y-z &= 2 \\ z &= a^2+a-2 \end{cases}$ dont la matrice augmentée est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a^2+a-2 \end{array}\right)$ est compatible.

- $(\mathcal{S}') : \begin{cases} x+y+z &= 4 \\ y-z &= 2 \\ 0z &= a^2+a-2 \end{cases}$ dont la matrice augmentée est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+a-2 \end{array}\right)$ est compatible si, et seulement si $a \in \{-2; 1\}$.

Méthode 5 :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice non nulle.

1. Quitte à prendre la transposée de A, il existe au moins un coefficient non nul dans la première colonne de A. On peut supposer que c'est a_{11} en multipliant à gauche A par une matrice de permutation si ce n'était pas le cas et en effectuant l'opération
$$\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_i.$$
En multipliant par une matrice de dilatation *i.e.* $\mathrm{L}_1 \leftarrow \dfrac{1}{a_{11}}\mathrm{L}_1$, on peut même supposer $a_{11} = 1$.
C'est le premier pivot.

Figure 1 – Algorithme de Gauss-Jordan d'un point de vue matriciel.

Méthode 5 :

2. En multipliant à gauche par des matrices de transvection, on annule tous les coefficients de la première colonne à partir de la deuxième ligne par des opérations élémentaires de la forme :

$$\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}\mathrm{L}_1.$$

La matrice A est alors transformée en une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & \bullet & \dots & \bullet \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{np} \end{pmatrix}.$$

Figure 1 – Algorithme de Gauss-Jordan d'un point de vue matriciel.

Méthode 5 :

3. Si la matrice $\begin{pmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n2} & \dots & a'_{np} \end{pmatrix}$ n'est pas nulle, on poursuit l'algorithme.

Figure 1 – Algorithme de Gauss-Jordan d'un point de vue matriciel.

Méthode 5 :

4. L'algorithme s'arrête lorsque l'on a atteint la dernière ligne ou lorsque toutes les lignes qui restent sont nulles *i.e.* la matrice A est alors transformée en une matrice échelonnée (réduite) de la forme :

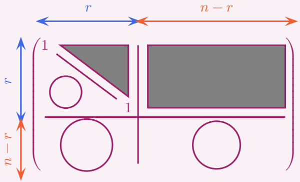
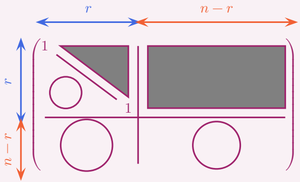


Figure 1 – Algorithme de Gauss-Jordan d'un point de vue matriciel.

Méthode 5 :

4. L'algorithme s'arrête lorsque l'on a atteint la dernière ligne ou lorsque toutes les lignes qui restent sont nulles *i.e.* la matrice A est alors transformée en une matrice échelonnée (réduite) de la forme :



Remarque : Les opérations sont les mêmes sur les colonnes en multipliant, cette fois, à droite par les matrices d'opérations élémentaires.

Figure 1 – Algorithme de Gauss-Jordan d'un point de vue matriciel.

II. Résolution pratique

2. Point de vue matriciel

Théorème 5 :

Tout système linéaire est équivalent à un système échelonné réduit.

Théorème 5 :

Tout système linéaire est équivalent à un système échelonné réduit.

i.e.

Pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, il existe une matrice E, produit de matrices de transformations élémentaires et une unique matrice échelonnée réduite en lignes R telle que :

$$\mathrm{A} = \mathrm{ER}.$$

Théorème 5 :

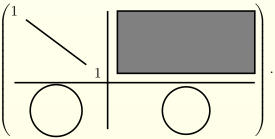
Tout système linéaire est équivalent à un système échelonné réduit.

i.e.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, il existe une matrice E, produit de matrices de transformations élémentaires et une unique matrice échelonnée réduite en lignes R telle que :

$$A = ER.$$

Toute matrice A est donc équivalente (par lignes) à une matrice de la forme :



Pour plus de commodités et par abus de langage, on étend le vocabulaire des systèmes à la matrice associée :

Définition 6 :

- Une matrice est dite échelonnée en lignes si le nombre de zéros précédant la première valeur non nulle d'une ligne augmente strictement ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste éventuellement plus que des zéros.

II. Résolution pratique
2. Point de vue matriciel

Pour plus de commodités et par abus de langage, on étend le vocabulaire des systèmes à la matrice associée :

Définition 6 :

- Une matrice est dite échelonnée en lignes si le nombre de zéros précédant la première valeur non nulle d'une ligne augmente strictement ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste éventuellement plus que des zéros.
- Le premier coefficient non nul de chaque ligne est appelé pivot.

Pour plus de commodités et par abus de langage, on étend le vocabulaire des systèmes à la matrice associée :

Définition 6 :

- Une matrice est dite échelonnée en lignes si le nombre de zéros précédant la première valeur non nulle d'une ligne augmente strictement ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste éventuellement plus que des zéros.
- Le premier coefficient non nul de chaque ligne est appelé pivot.
- Une matrice échelonnée est dite matrice échelonnée réduite, ou matrice canonique en lignes, si les pivots valent 1 et si les autres coefficients dans les colonnes des pivots sont nuls.

Définition 7 (Rang d'une matrice) :

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle rang d'une matrice, le nombre de lignes (resp. colonnes) non nulles dans sa forme échelonnées en lignes (resp. en colonnes).

Définition 7 (Rang d'une matrice) :

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle rang d'une matrice, le nombre de lignes (resp. colonnes) non nulles dans sa forme échelonnées en lignes (resp. en colonnes).

Remarques :

- Le rang n'étant pas changé par le produit de matrices d'opérations élémentaires, lorsqu'il ne s'agit que de trouver le rang d'une matrice et non son inverse, on peut effectuer des opérations sur les lignes et sur les colonnes en même temps.

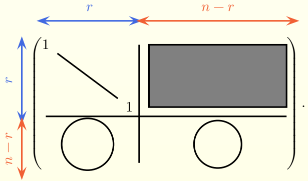
Définition 7 (Rang d'une matrice) :

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle rang d'une matrice, le nombre de lignes (resp. colonnes) non nulles dans sa forme échelonnées en lignes (resp. en colonnes).

Remarques :

- L'algorithme de la méthode (5) en « remontant », on montre ainsi que toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut être transformée en une matrice échelonnée réduite où le rang r est clairement lisible :



Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Effectuer des opérations élémentaires sur A, on l'a vu, revient à la multiplier par des matrices inversibles, et si A est elle-même inversible, le résultat de ces multiplications sera toujours une matrice inversible. Si donc à un moment on obtient une matrice NON inversible en cours de calcul, c'est le signe certain que A N'était PAS inversible.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- À présent, faisons l'hypothèse que nous avons réussi à transformer A en I_n par des opérations élémentaires E_1, ..., E_r sur les LIGNES, dans cet ordre.

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- À présent, faisons l'hypothèse que nous avons réussi à transformer A en I_n par des opérations élémentaires E_1, ..., E_r sur les LIGNES, dans cet ordre. Matriciellement, cela revient à dire que : $\mathrm{E}_r \dots \mathrm{E}_1 \mathrm{A} = \mathrm{I}_n$ **!! multiplications à GAUCHE !!** ou encore que A est inversible de matrice inverse $\mathrm{E}_r \dots \mathrm{E}_1 = \mathrm{A}^{-1}$.

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- À présent, faisons l'hypothèse que nous avons réussi à transformer A en I_n par des opérations élémentaires E_1, ..., E_r sur les LIGNES, dans cet ordre. Matriciellement, cela revient à dire que : $\mathrm{E}_r \dots \mathrm{E}_1 \mathrm{A} = \mathrm{I}_n$ **!! multiplications à GAUCHE !!** ou encore que A est inversible de matrice inverse $\mathrm{E}_r \dots \mathrm{E}_1 = \mathrm{A}^{-1}$.
  Conclusion inattendue, l'égalité précédente peut aussi s'écrire trivialement

$$\mathrm{E}_r \dots \mathrm{E}_1 \mathbf{I_n} = \mathrm{A}^{-1}.$$

II. Résolution pratique

3. Opérations élémentaires et matrices inversibles

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- À présent, faisons l'hypothèse que nous avons réussi à transformer A en I_n par des opérations élémentaires E_1, ..., E_r sur les LIGNES, dans cet ordre. Matriciellement, cela revient à dire que : $\mathrm{E}_r \dots \mathrm{E}_1 \mathrm{A} = \mathrm{I}_n$ **!! multiplications à GAUCHE !!** ou encore que A est inversible de matrice inverse $\mathrm{E}_r \dots \mathrm{E}_1 = \mathrm{A}^{-1}$.
  Conclusion inattendue, l'égalité précédente peut aussi s'écrire trivialement

$$\mathrm{E}_r \dots \mathrm{E}_1 \mathbf{I_n} = \mathrm{A}^{-1}.$$

Les mêmes opérations qui ont transformé A en I_n permettent de transformer I_n en A^{-1}. Ceci nous fournit un algorithme pratique d'échelonnement/réduction ou d'inversion suivant les cas (*confer* exemple (12)).

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- À présent, faisons l'hypothèse que nous avons réussi à transformer A en I_n par des opérations élémentaires E_1, ..., E_r sur les LIGNES, dans cet ordre. Matriciellement, cela revient à dire que : $\mathrm{E}_r \dots \mathrm{E}_1 \mathrm{A} = \mathrm{I}_n$ **!! multiplications à GAUCHE !!** ou encore que A est inversible de matrice inverse $\mathrm{E}_r \dots \mathrm{E}_1 = \mathrm{A}^{-1}$.
  Conclusion inattendue, l'égalité précédente peut aussi s'écrire trivialement
  $$\mathrm{E}_r \dots \mathrm{E}_1 \mathbf{I_n} = \mathrm{A}^{-1}.$$

ATTENTION

Je rappelle encore ici que le produit matriciel N'est PAS commutatif donc on ne peut s'amuser à travailler sur les lignes qui correspond à un produit à gauche puis ou et sur les colonnes ce qui correspond à un produit à droite.

Moralité : lorsque que vous commencerez avec des opérations sur les lignes, vous ne manipulerez plus que les lignes jusqu'à l'obtention de l'inverse et idem pour les colonnes au risque de trouver une matrice qui n'aura rien à voir avec l'inverse recherchée.

Exemple 12 :

Montrons que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et donnons son inverse.

On applique simultanément l'algorithme de Gauss à notre matrice A et à la matrice identité :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \qquad\qquad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{I_3}$$

Exemple 12 :

Montrons que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et donnons son inverse.

On applique simultanément l'algorithme de Gauss à notre matrice A et à la matrice identité :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \qquad \qquad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{I_3}$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exemple 12 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exemple 12 :

$$\begin{pmatrix}1&3&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}L_1 \leftarrow L_1 - L_3\\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

Exemple 12 :

$$\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2} \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{I_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2} \underbrace{\begin{pmatrix}-2&-1&4\\1&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}}_{A^{-1}}$$

Exemple 12 :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^{\mathrm{A}} \qquad\qquad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\mathrm{I}_3}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{I}_3} \qquad\qquad \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{A}^{-1}}$$

Transformation de A en I_3 par des opérations élémentaires sur les lignes

Transformation de I_3 en A^{-1} par report des opérations élémentaires qui ont changé A en I_3.

Exemple 12 :

Donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 :

Montrer que la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Résoudre $(\mathcal{S})$ c'est déterminer les antécédents de B pour l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}: & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ & \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{AX} \end{array}$$

III. Ensemble des solutions

1. Linéarité et conséquences

Résoudre $(\mathcal{S})$ c'est déterminer les antécédents de B pour l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{A}: & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ & \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{AX} \end{array}$$

En particulier, $(\mathcal{S}_0) = \mathcal{A}^{-1}\big((0)_{\mathbb{K}^m}\big)$.

Résoudre $(\mathcal{S})$ c'est déterminer les antécédents de B pour l'application

$$\mathcal{A}: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{AX} \end{array}$$

En particulier, $(\mathcal{S}_0) = \mathcal{A}^{-1}\big((0)_{\mathbb{K}^m}\big)$.

Par distributivité à droite du produit matriciel, l'application $\mathcal{A}$ vérifie

$$\forall \mathrm{X}, \mathrm{X}' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \mathcal{A}\left(\lambda \mathrm{X} + \mathrm{X}'\right) = \lambda \mathcal{A}(\mathrm{X}) + \mathcal{A}\left(\mathrm{X}'\right).$$

Résoudre $(\mathcal{S})$ c'est déterminer les antécédents de B pour l'application

$$\mathcal{A}: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{AX} \end{array}$$

En particulier, $(\mathcal{S}_0) = \mathcal{A}^{-1}\left((0)_{\mathbb{K}^m}\right)$.

Par distributivité à droite du produit matriciel, l'application $\mathcal{A}$ vérifie

$$\forall \mathrm{X}, \mathrm{X}' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \mathcal{A}\left(\lambda \mathrm{X} + \mathrm{X}'\right) = \lambda \mathcal{A}(\mathrm{X}) + \mathcal{A}\left(\mathrm{X}'\right).$$

L'application $\mathcal{A}$ est linéaire et le principe de superposition s'applique.

Proposition 6 (Principe de superposition) :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Si X_1 est solution de $\mathrm{AX} = \mathrm{B}_1$ et X_2 de $\mathrm{AX} = \mathrm{B}_2$, alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 \mathrm{X}_1 + \lambda_2 \mathrm{X}_2$ est solution de $\mathrm{AX} = \lambda_1 \mathrm{B}_1 + \lambda_2 \mathrm{B}_2$.

Théorème 7 (Structure de l'ensemble des solutions) :

Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} \in \mathbb{K}^m$. On considère le système linéaire $(\mathcal{S})$ sous sa forme matricielle $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ où $\mathrm{X} \in \mathbb{K}^n$ et $(\mathcal{S}_0)$ son système homogène associé.

1. $(\mathcal{S}_0)$ est non vide et stable par combinaisons linéaires. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Vocabulaire : On dit que l'ensemble des solutions du système $(\mathcal{S})$ est un espace affine dirigé par l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène.

Théorème 7 (Structure de l'ensemble des solutions) :

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^m$. On considère le système linéaire $(\mathcal{S})$ sous sa forme matricielle $AX = B$ où $X \in \mathbb{K}^n$ et $(\mathcal{S}_0)$ son système homogène associé.

1. $(\mathcal{S}_0)$ est non vide et stable par combinaisons linéaires. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
2. Si $(\mathcal{S})$ est compatible, la solution générale du système est la somme d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène :

Solution générale	=	Solution particulière	+	Solution de l'équation homogène.
$(\mathcal{S})$	=	X_p	+	$(\mathcal{S}_0)$.

Vocabulaire : On dit que l'ensemble des solutions du système $(\mathcal{S})$ est un espace affine dirigé par l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène.

Exemple 13 :

Soit le système $(\mathcal{S}_{13})$: $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ 2x & + & 5y & + & z & = & 4 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}\right.$ d'inconnu $(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$.

Exemple 13 :

Soit le système $(\mathcal{S}_{13})$: $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ 2x & + & 5y & + & z & = & 4 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}\right.$ d'inconnu $(x\,;y\,;z)\in\mathbb{R}^3$.

$$(\mathcal{S}_{13}) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & - & z & = & -3 & \\ & & y & + & 3z & = & 10 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1 \\ & & y & - & 2z & = & -5 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \end{array}\right.$$

Exemple 13 :

Soit le système $(\mathcal{S}_{13})$: $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ 2x & + & 5y & + & z & = & 4 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}\right.$ d'inconnu $(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(\mathcal{S}_{13}) \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ & & y & + & 3z & = & 10 \\ & & y & - & 2z & = & -5 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ & & y & + & 3z & = & 10 \\ & & & & 5z & = & 15 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_3 \end{array}$$

Exemple 13 :

Soit le système $(\mathcal{S}_{13})$: $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ 2x & + & 5y & + & z & = & 4 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}\right.$ d'inconnu $(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(\mathcal{S}_{13}) \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ & & y & + & 3z & = & 10 \\ & & y & - & 2z & = & -5 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ & & y & + & 3z & = & 10 \\ & & & & 5z & = & 15 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_3 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & -2 \\ y & = & 1 \\ z & = & 3 \end{array}\right.$$

Exemple 13 :

Soit le système $(\mathcal{S}_{13})$: $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ 2x & + & 5y & + & z & = & 4 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}\right.$ d'inconnu $(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(\mathcal{S}_{13}) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & - & z & = & -3 & \\ & & y & + & 3z & = & 10 & \quad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1 \\ & & y & - & 2z & = & -5 & \quad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & - & z & = & -3 & \\ & & y & + & 3z & = & 10 & \\ & & & & 5z & = & 15 & \quad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & -2 \\ y & = & 1 \\ z & = & 3 \end{array}\right.$$

L'unique solution de $(\mathcal{S}_{13})$ est donc le triplet $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exemple 13 :

Soit le système $(\mathcal{S}_{13})$: $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ 2x & + & 5y & + & z & = & 4 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}\right.$ d'inconnu $(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(\mathcal{S}_{13}) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & - & z & = & -3 & \\ & & y & + & 3z & = & 10 & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1 \\ & & y & - & 2z & = & -5 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & - & z & = & -3 & \\ & & y & + & 3z & = & 10 & \\ & & & & 5z & = & 15 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & -2 \\ y & = & 1 \\ z & = & 3 \end{array}\right.$$

L'unique solution de $(\mathcal{S}_{13})$ est donc le triplet $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (0)_{\mathbb{R}^3}$.

Solution particulière

Solution homogène

Exemple 14 :

Enlevons une équation au système précédent. La résolution est identique :

$$(\mathcal{S}_{14}) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ 2x & + & 5y & + & z & = & 4 \end{array} \right.$$

Exemple 14 :

$$(\mathcal{S}_{14}) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ 2x & + & 5y & + & z & = & 4 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ & & y & + & 3z & = & 10 \end{array} \right. \quad \scriptstyle \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1$$

Exemple 14 :

$$(\mathcal{S}_{14}) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ 2x & + & 5y & + & z & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ & & y & + & 3z & = & 10 \end{array}\right. \quad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & -23 & + & 7z \\ y & = & 10 & - & 3z \\ z & = & & & z \end{array}\right.$$

Exemple 14 :

$$(\mathcal{S}_{14}) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ 2x & + & 5y & + & z & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ & & y & + & 3z & = & 10 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & -23 & + & 7z \\ y & = & 10 & - & 3z \\ z & = & & & z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & -23 & + & 7z \\ y & = & 10 & - & 3z \\ z & = & & & z \end{array}\right. .$$

Exemple 14 :

$$(\mathcal{S}_{14}) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ 2x & + & 5y & + & z & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ & & y & + & 3z & = & 10 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & -23 & + & 7z \\ y & = & 10 & - & 3z \\ z & = & & & z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & -23 & + & 7z \\ y & = & 10 & - & 3z \\ z & = & & & z \end{array}\right. .$$

Remarque : Les inconnues x et y sont les inconnues principales et l'inconnue z est l'inconnue secondaire.

Exemple 14 :

$$(\mathcal{S}_{14}) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ 2x & + & 5y & + & z & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ & & y & + & 3z & = & 10 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & -23 & + & 7z \\ y & = & 10 & - & 3z \\ z & = & & & z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & -23 & + & 7z \\ y & = & 10 & - & 3z \\ z & = & & & z \end{array}\right. .$$

Remarque : Les inconnues x et y sont les inconnues principales et l'inconnue z est l'inconnue secondaire.

Les solutions de $(\mathcal{S}_{14})$ sont donc tous les triplets $\begin{pmatrix} -23+7\lambda \\ 10-3\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\lambda . \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple 14 :

$$(\mathcal{S}_{14}) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ 2x & + & 5y & + & z & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & -23 & + & 7z \\ y & = & 10 & - & 3z \\ z & = & & & z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & -23 & + & 7z \\ y & = & 10 & - & 3z \\ z & = & & & z \end{array}\right. .$$

Remarque : Les inconnues x et y sont les inconnues principales et l'inconnue z est l'inconnue secondaire.

Les solutions de $(\mathcal{S}_{14})$ sont donc tous les triplets $\begin{pmatrix} -23+7\lambda \\ 10-3\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda.\underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution particulière

Solution homogène

Définition 8 (Rang d'un système linéaire) :

On appelle rang d'un système linéaire, le nombre de ses inconnues principales.

Exemples 15 :

- $(\mathcal{S}_3)$ est de rang 3.

$$(\mathcal{S}_3) : \left\{ \begin{array}{rcr} x + 3y - z & = & -6 \\ -y + 3z & = & 16 \\ z & = & 5 \end{array} \right.$$

Définition 8 (Rang d'un système linéaire) :

On appelle rang d'un système linéaire, le nombre de ses inconnues principales.

Exemples 15 :

- $(\mathcal{S}_3)$ est de rang 3.
- $(\mathcal{S}_{13})$ est de rang 3.

$$(\mathcal{S}_{13}) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ & & y & + & 3z & = & 10 \\ & & & & 5z & = & 15 \end{array} \right.$$

Définition 8 (Rang d'un système linéaire) :

On appelle rang d'un système linéaire, le nombre de ses inconnues principales.

Exemples 15 :

- $(\mathcal{S}_3)$ est de rang 3.
- $(\mathcal{S}_{13})$ est de rang 3.
- $(\mathcal{S}_{14})$ est de rang 2.

$$(\mathcal{S}_{14}) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ & & y & + & 3z & = & 10 \end{array} \right.$$

Définition 8 (Rang d'un système linéaire) :

On appelle rang d'un système linéaire, le nombre de ses inconnues principales.

Exemples 15 :

- $(\mathcal{S}_3)$ est de rang 3.
- $(\mathcal{S}_{13})$ est de rang 3.
- $(\mathcal{S}_{14})$ est de rang 2.

Le théorème (5) a immédiatement une conséquence importante :

Corollaire 2 :

Le rang d'un système linéaire est égal au nombre de ses pivots après échelonnement.

Définition 8 (Rang d'un système linéaire) :

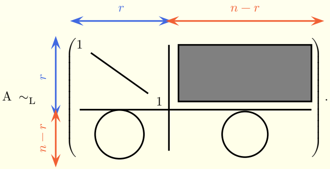
On appelle rang d'un système linéaire, le nombre de ses inconnues principales.

Exemples 15 :

- $(\mathcal{S}_3)$ est de rang 3.
- $(\mathcal{S}_{13})$ est de rang 3.
- $(\mathcal{S}_{14})$ est de rang 2.

Corollaire 2 :

Le rang d'un système linéaire est égal au nombre de ses pivots après échelonnement.



Exemples 16 (Systèmes échelonnés) :

En reprenant les systèmes de l' exemple (7) on a :

1. Rang 3.

Exemples 16 (Systèmes échelonnés) :

En reprenant les systèmes de l' exemple (7) on a :

1. Rang 3.
2. Rang 2.

Exemples 16 (Systèmes échelonnés) :

En reprenant les systèmes de l' exemple (7) on a :

1. Rang 3.
2. Rang 2.
3. Rang 1.

Exemples 16 (Systèmes échelonnés) :

En reprenant les systèmes de l' exemple (7) on a :

1. Rang 3.
2. Rang 2.
3. Rang 1.
4. Rang 4.

Exemples 16 (Systèmes échelonnés) :

En reprenant les systèmes de l' exemple (7) on a :

1. Rang 3.
2. Rang 2.
3. Rang 1.
4. Rang 4.
5. Rang 4.

Exemple 17 :

Supprimons encore une équation à $(\mathcal{S}_{14})$ pour former $(\mathcal{S}_{17})$:

$$(\mathcal{S}_{17}) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & -3 \end{array} \right.$$

Exemple 17 :

Supprimons encore une équation à $(\mathcal{S}_{14})$ pour former $(\mathcal{S}_{17})$:

$$(\mathcal{S}_{17}) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & -3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & -3 & - & 2y & + & z \\ y & = & & & y & & \\ z & = & & & & & z \end{array} \right.$$

Exemple 17 :

Supprimons encore une équation à $(\mathcal{S}_{14})$ pour former $(\mathcal{S}_{17})$:

$$(\mathcal{S}_{17}) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & -3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & -3 & - & 2y & + & z \\ y & = & & & y & & \\ z & = & & & & & z \end{array} \right.$$

Les solutions de $(\mathcal{S}_{17})$ sont donc tous les triplets de la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda . \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 17 :

Supprimons encore une équation à $(\mathcal{S}_{14})$ pour former $(\mathcal{S}_{17})$:

$$(\mathcal{S}_{17}) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & -3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & -3 & - & 2y & + & z \\ y & = & & & y & & \\ z & = & & & & & z \end{array} \right.$$

Les solutions de $(\mathcal{S}_{17})$ sont donc tous les triplets de la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Solution particulière}} + \lambda. \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu. \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Solution homogène}} \text{ où } \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 17 :

Supprimons encore une équation à $(\mathcal{S}_{14})$ pour former $(\mathcal{S}_{17})$:

$$(\mathcal{S}_{17}) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & -3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & -3 & - & 2y & + & z \\ y & = & & & y & & \\ z & = & & & & & z \end{array} \right.$$

Les solutions de $(\mathcal{S}_{17})$ sont donc tous les triplets de la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda . \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}.$$

Solution particulière

Solution homogène

x est la seule inconnue principale donc le système $(\mathcal{S}_{17})$ est de rang 1.

III. Ensemble des solutions
2. Rang d'un système linéaire

Exemple 17 :

Supprimons encore une équation à $(\mathcal{S}_{14})$ pour former $(\mathcal{S}_{17})$:

$$(\mathcal{S}_{17}) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & -3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & -3 & - & 2y & + & z \\ y & = & & & y & & \\ z & = & & & & & z \end{array} \right.$$

Les solutions de $(\mathcal{S}_{17})$ sont donc tous les triplets de la forme :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda . \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Solution particulière

Solution homogène

x est la seule inconnue principale donc le système $(\mathcal{S}_{17})$ est de rang 1.

Remarque : On aurait tout aussi bien pu choisir y ou z comme inconnue principale.

Définition 9 (Espace vectoriel engendré par une partie) :

Soient X_1, ..., $X_r \in \mathbb{K}^n$.

L'ensemble des combinaisons linéaires de X_1, ..., X_r est noté $\text{vect}\,(X_1, \dots, X_r)$:

$$\text{Vect}(X_1, \dots, X_r) = \Big\{\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_r X_r\Big\}_{\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}}$$

Exemples 18 :

En reprenant les exemples précédents :

- Les solutions de $(\mathcal{S}_{10})$ s'écrivent $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Exemples 18 :

En reprenant les exemples précédents :

- Les solutions de $(\mathcal{S}_{10})$ s'écrivent $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.
- Les solutions de $(\mathcal{S}_9)$ s'écrivent $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Exemples 18 :

En reprenant les exemples précédents :

- Les solutions de $(\mathcal{S}_{14})$ s'écrivent $\begin{pmatrix} -23 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Exemples 18 :

En reprenant les exemples précédents :

- Les solutions de $(\mathcal{S}_{14})$ s'écrivent $\begin{pmatrix} -23 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
- Les solutions de $(\mathcal{S}_{17})$ s'écrivent $\begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Définition 10 (Notion de dimension d'un SEV) :

On appelle dimension de l'ensemble $\mathrm{E} = \mathrm{vect}\,(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r)$, notée $\dim(\mathrm{E})$, le nombre de vecteurs indépendants de E.

Définition 10 (Notion de dimension d'un SEV) :

On appelle dimension de l'ensemble $\mathrm{E} = \mathrm{vect}\,(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_r)$, notée $\dim(\mathrm{E})$, le nombre de vecteurs indépendants de E.

Remarque : La dimension d'un vect n'est pas forcément égale au nombre de ses vecteurs.

Définition 10 (Notion de dimension d'un SEV) :

On appelle dimension de l'ensemble $\mathrm{E} = \mathrm{vect}\,(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r)$, notée $\dim(\mathrm{E})$, le nombre de vecteurs indépendants de E.

Remarque : La dimension d'un vect n'est pas forcément égale au nombre de ses vecteurs.

Exemples 19 :

- Deux vecteurs sont indépendants si, et seulement si ils ne sont pas colinéaires.

Définition 10 (Notion de dimension d'un SEV) :

On appelle dimension de l'ensemble $E = \text{vect}\,(X_1, \ldots, X_r)$, notée $\dim(E)$, le nombre de vecteurs indépendants de E.

Remarque : La dimension d'un vect n'est pas forcément égale au nombre de ses vecteurs.

Exemples 19 :

- Deux vecteurs sont indépendants si, et seulement si ils ne sont pas colinéaires.
- Trois vecteurs le sont s'ils ne sont pas coplanaires.

Exemples 20 (Dimension de sev dans $\mathbb{R}^2$) :

- $\mathrm{A} = \mathrm{vect}\left((2\,;3)\right) = \left\{\,(2x\,;3x)\,\right\}_{x\in\mathbb{R}}$. C'est la droite d'équation $y = \dfrac{3}{2}x$.

$$\dim\left(\mathrm{A}\right) = 1.$$

Exemples 20 (Dimension de sev dans $\mathbb{R}^2$) :

- $\mathrm{A} = \mathrm{vect}\left((2\,;3)\right) = \left\{\,(2x\,;3x)\,\right\}_{x\in\mathbb{R}}$. C'est la droite d'équation $y = \dfrac{3}{2}x$.

$$\dim(\mathrm{A}) = 1.$$

- $\mathrm{B} = \mathrm{vect}\left((1\,;0)\,,\,(0\,;1)\right) = \left\{x\,(1\,;0) + y\,(0\,;1)\,\right\}_{x,\,y\in\mathbb{R}} = \left\{\,(x\,;y)\,\right\}_{x,\,y\in\mathbb{R}}$.
  C'est le plan $(x\mathrm{O}y)$ et $\dim(\mathrm{B}) = 2$.

Exemples 20 (Dimension de sev dans $\mathbb{R}^2$) :

- $\mathrm{A} = \operatorname{vect}((2\,;3)) = \left\{\,(2x\,;3x)\,\right\}_{x\in\mathbb{R}}$. C'est la droite d'équation $y = \dfrac{3}{2}x$.

$$\dim(\mathrm{A}) = 1.$$

- $\mathrm{B} = \operatorname{vect}((1\,;0)\,,\,(0\,;1)) = \left\{x\,(1\,;0) + y\,(0\,;1)\,\right\}_{x,\,y\in\mathbb{R}} = \left\{\,(x\,;y)\,\right\}_{x,\,y\in\mathbb{R}}$.
  C'est le plan $(x\mathrm{O}y)$ et $\dim(\mathrm{B}) = 2$.

- $\mathrm{C} = \left\{\,(2+2x\,;1+y-x)\,\right\}_{x,\,y,\in\mathbb{R}} = \left\{\begin{pmatrix} 2+2x \\ 1-x+y \end{pmatrix}\right\}$

$$= \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}_{x,\,y\in\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

  C'est le plan passant par le point $(2\,;1)$ et dirigé par les deux vecteurs indépendants $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *i.e.* c'est le plan $\mathbb{R}^2$ lui-même et $\dim(\mathrm{C}) = 2$.

Exemples 21 (Dimension de sev dans $\mathbb{R}^3$) :

- Soit D le plan passant par l'origine du repère et dirigé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. $\dim(\mathrm{D}) = 2$ et on a :

$$\mathrm{D} = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \left\{\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}_{\lambda,\mu\in\mathbb{R}} = \{(\lambda+\mu\,;2\lambda\,;\mu)\}_{\lambda,\,\mu\in\mathbb{R}}.$$

Remarque : $2x = y + 2z$ donc D est aussi le plan d'équation $2x - y - 2z = 0$.

Exemples 21 (Dimension de sev dans $\mathbb{R}^3$) :

- $\mathrm{E} = \{\, (x+y-z\,;2x-y\,;3y+z) \,\}_{x,\,y,\,z\in\mathbb{R}} = \left\{ x\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}_{x,\,y,\,z\in\mathbb{R}}$

  $= \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \right).$

Exemples 21 (Dimension de sev dans $\mathbb{R}^3$) :

- $\mathrm{F} = \left\{ (3+x\,;3x+7\,;1+2x) \right\}_{x\in\mathbb{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}_{x\in\mathbb{R}}$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

C'est la droite passant par le point $(3\,;7\,;1)$ et dirigé par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$\dim(\mathrm{F}) = 1$.

La notation vect () permet une expression agréable de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

Théorème 8 (Rang d'un système) :

Le rang d'un système linéaire est égal au nombre d'inconnues retranché de la dimension de l'ensemble des solutions du système homogène associé.

La notation vect () permet une expression agréable de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

Théorème 8 (Rang d'un système) :

Le rang d'un système linéaire est égal au nombre d'inconnues retranché de la dimension de l'ensemble des solutions du système homogène associé.

Exemples 22 :

Notons $\mathscr{H}_0$, l'espace vectoriel des solutions du système homogène associé à $(\mathscr{S})$.

- À l' exemple (13) , $\dim \mathscr{H}_0 = 0$ d'où $\operatorname{rg} \mathscr{S}_3 = 3 - 0 = 3$.

III. Ensemble des solutions

2. Rang d'un système linéaire

La notation $\operatorname{vect}()$ permet une expression agréable de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

Théorème 8 (Rang d'un système) :

Le rang d'un système linéaire est égal au nombre d'inconnues retranché de la dimension de l'ensemble des solutions du système homogène associé.

Exemples 22 :

Notons $\mathcal{H}_0$, l'espace vectoriel des solutions du système homogène associé à $(\mathcal{S})$.

- À l' exemple (13) , $\dim \mathcal{H}_0 = 0$ d'où $\operatorname{rg} \mathcal{S}_3 = 3 - 0 = 3$.
- À l' exemple (14) , $\dim \mathcal{H}_0 = 1$ d'où $\operatorname{rg} \mathcal{S}_2 = 3 - 1 = 2$.

La notation $\mathrm{vect}\,()$ permet une expression agréable de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

Théorème 8 (Rang d'un système) :

Le rang d'un système linéaire est égal au nombre d'inconnues retranché de la dimension de l'ensemble des solutions du système homogène associé.

Exemples 22 :

Notons $\mathscr{H}_0$, l'espace vectoriel des solutions du système homogène associé à $(\mathcal{S})$.

- À l' exemple (13) , $\dim \mathscr{H}_0 = 0$ d'où $\mathrm{rg}\, \mathcal{S}_3 = 3 - 0 = 3$.
- À l' exemple (14) , $\dim \mathscr{H}_0 = 1$ d'où $\mathrm{rg}\, \mathcal{S}_2 = 3 - 1 = 2$.
- À l' exemple (17) , $\dim \mathscr{H}_0 = 2$ d'où $\mathrm{rg}\, \mathcal{S}_1 = 3 - 2 = 1$.

Exercice 4 :

Résoudre et discuter le système suivant d'inconnue (x, y, z) et de paramètre a :

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

IV. Systèmes linéaires et matrices inversibles

1. Systèmes de Cramer

Définition 11 (Système de Cramer) :

Un système linéaire est dit de Cramer si sa matrice est inversible.

En particulier, un système de Cramer est nécessairement carré : autant d'inconnues que d'équations.

Définition 11 (Système de Cramer) :

Un système linéaire est dit de Cramer si sa matrice est inversible.

En particulier, un système de Cramer est nécessairement carré : autant d'inconnues que d'équations.

Théorème 9 :

Tout système de Cramer $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une unique solution :

$$X = A^{-1}B.$$

Le théorème qui suit fait définitivement le lien entre inversibilité d'une matrice et la résolubilité des systèmes linéaires.

Théorème 10 (Matrices inversibles et systèmes linéaires) :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La matrice A est inversible si, et seulement si $\forall\, Y \in \mathbb{K}^n$, le système linéaire $Y = AX$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$ possède une unique solution.

On peut être un peu plus explicite :

Corollaire 3 :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall\, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ admet une unique solution.

Corollaire 3 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall\, B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.
2. $\forall\, B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution.

Corollaire 3 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall\, B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.
2. $\forall\, B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution.
3. $\mathrm{rg}(A) = n$.

Corollaire 3 :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall\, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ admet une unique solution.
2. $\forall\, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ admet au moins une solution.
3. $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = n$.

Corollaire 3 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall\, B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.
2. $\forall\, B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution.
3. $\mathrm{rg}(A) = n$.
4. $A \sim_L I_n$.

Corollaire 3 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall\, B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.
2. $\forall\, B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution.
3. $\mathrm{rg}(A) = n$.
4. $A \sim_L I_n$.
5. A est inversible.

Corollaire 3 :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall\, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ admet une unique solution.
2. $\forall\, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ admet au moins une solution.
3. $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = n$.
4. $\mathrm{A} \sim_{\mathrm{L}} \mathrm{I}_n$.
5. A est inversible.
6. Le système $\mathrm{AX} = 0$ n'admet que la solution nulle.

Corollaire 3 :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall\, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ admet une unique solution.
2. $\forall\, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ admet au moins une solution.
3. $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = n$.
4. $\mathrm{A} \sim_{\mathrm{L}} \mathrm{I}_n$.
5. A est inversible.
6. Le système $\mathrm{AX} = 0$ n'admet que la solution nulle.

Corollaire 3 :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall\, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ admet une unique solution.
2. $\forall\, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ admet au moins une solution.
3. $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = n$.
4. $\mathrm{A} \sim_{\mathrm{L}} \mathrm{I}_n$.
5. A est inversible.
6. Le système $\mathrm{AX} = 0$ n'admet que la solution nulle.

On retrouve un résultat démontré dans un chapitre précédent :

Corollaire 4 (Inversibilité des matrices triangulaires et diagonales) :

Une matrice triangulaire (ou diagonale) est inversible si, et seulement si ses coefficients diagonaux sont **tous** non nuls.

Ce théorème va donc nous permettre à la fois de savoir si oui ou non une matrice est inversible et, le cas échéant, de calculer son inverse. Le mot d'ordre est simple : résoudre un système linéaire !

Exemple 23 :

La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exemple 23 :

En effet, pour tous $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Exemple 23 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rl} 2x+3y+z & = a \\ x+y+2z & = b \\ x+y+z & = c \end{array} \right.$$

Exemple 23 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{aligned} 2x+3y+z &= a \\ x+y+2z &= b \\ x+y+z &= c \end{aligned} \right.$$

$$\mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_1 \quad \left(\begin{array}{c} \text{choix d'un pivot} \\ \text{simple de valeur 1} \end{array} \right) \iff \left\{ \begin{aligned} x+y+2z &= b \\ 2x+3y+z &= a \\ x+y+z &= c \end{aligned} \right.$$

Exemple 23 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rl} 2x+3y+z & = a \\ x+y+2z & = b \\ x+y+z & = c \end{array} \right.$$

$$\mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_1 \quad \begin{pmatrix} \text{choix d'un pivot} \\ \text{simple de valeur 1} \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rl} x+y+2z & = b \\ 2x+3y+z & = a \\ x+y+z & = c \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rl} x+y+2z & = b \\ y-3z & = a-2b \\ z & = b-c \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \end{array}$$

Exemple 23 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rl} 2x+3y+z & = a \\ x+y+2z & = b \\ x+y+z & = c \end{array}\right.$$

$$\mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_1 \quad \left(\begin{array}{c}\text{choix d'un pivot} \\ \text{simple de valeur 1}\end{array}\right) \iff \left\{\begin{array}{rl} x+y+2z & = b \\ 2x+3y+z & = a \\ x+y+z & = c \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rl} x+y+2z & = b \\ y-3z & = a-2b \\ z & = b-c \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rl} x+y & = -b+2c \\ y & = a+b-3c \\ z & = b-c \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - 2\mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + 3\mathrm{L}_3 \\ \\ \end{array}$$

Exemple 23 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rl} 2x+3y+z & = a \\ x+y+2z & = b \\ x+y+z & = c \end{array}\right.$$

$$\mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_1 \quad \begin{pmatrix} \text{choix d'un pivot} \\ \text{simple de valeur 1} \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rl} x+y+2z & = b \\ 2x+3y+z & = a \\ x+y+z & = c \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rl} x+y+2z & = b \\ y-3z & = a-2b \\ z & = b-c \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rl} x+y & = -b+2c \\ y & = a+b-3c \\ z & = b-c \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - 2\mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + 3\mathrm{L}_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rl} x & = -a-2b+5c \\ y & = a+b-3c \\ z & = b-c. \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

Exemple 23 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rl} 2x+3y+z & = a \\ x+y+2z & = b \\ x+y+z & = c \end{array}\right.$$

$$\mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_1 \quad \left(\begin{array}{c}\text{choix d'un pivot} \\ \text{simple de valeur 1}\end{array}\right) \iff \left\{\begin{array}{rl} x+y+2z & = b \\ 2x+3y+z & = a \\ x+y+z & = c \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rll} x+y+2z & = b & \\ y-3z & = a-2b & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1 \\ z & = b-c & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rll} x+y & = -b+2c & \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - 2\mathrm{L}_3 \\ y & = a+b-3c & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + 3\mathrm{L}_3 \\ z & = b-c & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rll} x & = -a-2b+5c & \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2 \\ y & = a+b-3c & \\ z & = b-c. & \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Exemple 23 :

En effet, pour tous $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Exemple 23 :

En effet, pour tous $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Nous avons ainsi réussi à résoudre le système linéaire initial pour TOUT second membre (a, b, c). Cela prouve que la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

Exemple 23 :

En effet, pour tous $(x,y,z),(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Nous avons ainsi réussi à résoudre le système linéaire initial pour TOUT second membre (a,b,c). Cela prouve que la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

Son inverse $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ apparaît naturellement en fin de résolution.

Méthode 6 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comment déterminer l'inversibilité de A et calculer son inverse éventuel ?

Par résolution du système $AX = Y$ **pour tout second membre** Y **:** On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et on résout $AX = Y$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec la méthode du pivot.

Méthode 6 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comment déterminer l'inversibilité de A et calculer son inverse éventuel ?

Par résolution du système $AX = Y$ **pour tout second membre** Y **:** On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et on résout $AX = Y$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec la méthode du pivot.

1. S'il y a une solution, on l'écrit matriciellement comme $X = BY$: on a alors $B = A^{-1}$.

Méthode 6 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comment déterminer l'inversibilité de A et calculer son inverse éventuel ?

Par résolution du système $AX = Y$ pour tout second membre Y : On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et on résout $AX = Y$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec la méthode du pivot.

1. S'il y a une solution, on l'écrit matriciellement comme $X = BY$: on a alors $B = A^{-1}$.
2. Si le système $AX = Y$ n'est pas compatible pour au moins un Y, alors A n'est pas inversible.

Méthode 6 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comment déterminer l'inversibilité de A et calculer son inverse éventuel ?

Par la méthode du pivot sur la matrice concaténée $(A \mid \mathbf{I}_n)$: On effectue des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice concaténée $(A \mid \mathbf{I}_n)$ selon la méthode du pivot afin d'échelonner A : on aboutit à une matrice du type $(A' \mid *)$ avec A' échelonnée.

Méthode 6 :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comment déterminer l'inversibilité de A et calculer son inverse éventuel ?

Par la méthode du pivot sur la matrice concaténée $(\mathrm{A} \mid \mathbf{I}_n)$ **:** On effectue des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice concaténée $(\mathrm{A} \mid \mathbf{I}_n)$ selon la méthode du pivot afin d'échelonner A : on aboutit à une matrice du type $(\mathrm{A}' \mid *)$ avec A' échelonnée.

1. Si A' a strictement moins de n pivots, alors A n'est pas inversible.

Méthode 6 :

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Comment déterminer l'inversibilité de A et calculer son inverse éventuel ?

Par la méthode du pivot sur la matrice concaténée $(\mathrm{A} \mid \mathbf{I}_n)$ **:** On effectue des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice concaténée $(\mathrm{A} \mid \mathbf{I}_n)$ selon la méthode du pivot afin d'échelonner A : on aboutit à une matrice du type $(\mathrm{A}' \mid *)$ avec A' échelonnée.

1. Si A' a strictement moins de n pivots, alors A n'est pas inversible.
2. Si A' a n pivots, alors A est inversible. On réduit alors A' par opérations élémentaires, pour obtenir une matrice équivalente par lignes $(\mathbf{I}_n \mid \mathrm{B})$.
   On conclut alors que $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{B}$.

Exercice 5 :

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 5 :

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et donner son inverse.

Correction :

Soient $(x\,;y\,;z)$ et $(a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3$.

On applique les deux méthodes en parallèles :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Correction :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}^{\mathrm{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^{\mathrm{A}} \quad \iff \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 3y & + & z & = & a & & \\ x & + & 2y & + & z & = & & b & \\ -x & + & 4y & + & 5z & = & & & c \end{array} \right. \qquad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\mathrm{I}_3}$$

Correction :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \qquad \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & a \\ x & + & 2y & + & z & = & b \\ -x & + & 4y & + & 5z & = & c \end{array} \right. \qquad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{I_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & a \\ & & y & - & z & = & a - b \\ & & y & & & = & a - c \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Correction :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}^{\mathrm{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^{\mathrm{A}} \quad \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & 3y & + & z & = & a & & & & \\ x & + & 2y & + & z & = & & & b & & \\ -x & + & 4y & + & 5z & = & & & & & c \end{array} \right. \qquad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\mathrm{I}_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & 3y & + & z & = & a & & & & \\ & & y & - & z & = & a & - & b & & \\ & & y & & & = & a & & & - & c \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & 3y & + & z & = & a & & & & \\ & & y & - & z & = & a & - & b & & \\ & & & & z & = & & & b & - & c \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Correction :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}^{\mathrm{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^{\mathrm{A}} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & a \\ x & + & 2y & + & z & = & \phantom{a-{}} b \\ -x & + & 4y & + & 5z & = & \phantom{a-b-{}} c \end{array} \right. \qquad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\mathrm{I}_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & a \\ & & y & - & z & = & a - b \\ & & y & & & = & a \phantom{{}-b} - c \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & a \\ & & y & - & z & = & a - b \\ & & & & z & = & \phantom{a-{}} b - c \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & & & = & a - b + c \\ & & y & & & = & a \phantom{{}-b} - c \\ & & & & z & = & \phantom{a-{}} b - c \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3 \\ \\ \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Correction :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}^{\mathrm{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^{\mathrm{A}} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & a \\ x & + & 2y & + & z & = & b \\ -x & + & 4y & + & 5z & = & c \end{array} \right. \qquad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\mathrm{I}_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & a \\ & & y & - & z & = & a - b \\ & & y & & & = & a - c \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & a \\ & & y & - & z & = & a - b \\ & & & & z & = & b - c \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & 3y & = & a - b + c \\ & & y & = & a - c \\ & & z & = & b - c \end{array} \right. \begin{array}{l} \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3 \\ \\ \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{I}_3} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2a - b + 4c \\ y & = & a - c \\ z & = & b - c \end{array} \right. \begin{array}{l} \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - 3\mathrm{L}_2 \\ \\ \\ \end{array} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{A}^{-1}}$$

Correction :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}^{\mathrm{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^{\mathrm{A}} \qquad \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrclcc} x & + & 3y & + & z & = & a & & \\ x & + & 2y & + & z & = & & b & \\ -x & + & 4y & + & 5z & = & & & c \end{array} \right. \qquad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\mathrm{I}_3}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{I}_3} \qquad \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccrcrcr} x & & & = & -2a & - & b & + & 4c \\ & y & & = & a & & & - & c \\ & & z & = & & & b & - & c \end{array} \right. \quad \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - 3\mathrm{L}_2 \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{A}^{-1}}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{A}^{-1}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Correction :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}^{\mathrm{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^{\mathrm{A}} \qquad \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & a \\ x & + & 2y & + & z & = & b \\ -x & + & 4y & + & 5z & = & c \end{array} \right. \qquad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\mathrm{I}_3}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{I}_3} \qquad \iff \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -2a - b + 4c \qquad \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - 3\mathrm{L}_2 \\ y & = & a - c \\ z & = & b - c \end{array} \right. \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{A}^{-1}}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{A}^{-1}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Transformation de A en I_3 par des opérations élémentaires sur les lignes

Transformation de I_3 en A^{-1} par report des opérations élémentaires qui ont changé A en I_3.

Correction :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}^{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Donc A est inversible d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

D'après le corollaire (3), A est inversible si, et seulement si le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle $X = (0)_{\mathbb{K}^n}$.

D'après le corollaire (3) , A est inversible si, et seulement si le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle $X = (0)_{\mathbb{K}^n}$.

Par la contraposée, on a le résultat très intéressant en pratique :

Corollaire 5 (Lire la non inversibilité sur les colonnes) :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. A N'est PAS inversible.

D'après le corollaire (3) , A est inversible si, et seulement si le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle $X = (0)_{\mathbb{K}^n}$.

Par la contraposée, on a le résultat très intéressant en pratique :

Corollaire 5 (Lire la non inversibilité sur les colonnes) :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. A N'est PAS inversible.
2. Il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $X \neq (0)_{\mathbb{K}^n}$ et $AX = (0)_{\mathbb{K}^n}$.

D'après le corollaire (3) , A est inversible si, et seulement si le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle $X = (0)_{\mathbb{K}^n}$.

Par la contraposée, on a le résultat très intéressant en pratique :

Corollaire 5 (Lire la non inversibilité sur les colonnes) :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. A N'est PAS inversible.
2. Il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $X \neq (0)_{\mathbb{K}^n}$ et $AX = (0)_{\mathbb{K}^n}$.
3. Il existe une combinaison linéaire nulle des colonnes de A avec des coefficients non tous nuls :

$$\exists\ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \cdots, 0)\}, \qquad \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_n A_n = 0_{n,1},$$

où $A_1, \dots, A_n$ désignent les colonnes de A.

Exemples 24 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \notin \mathcal{G}l_3(\mathbb{R}).$$

Exemples 24 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \notin \mathcal{G}l_3(\mathbb{R}) \text{car } \mathrm{C}_1 - 2\mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Exemples 24 :

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \notin \mathcal{G}l_3(\mathbb{R})$car $C_1 - 2C_2 + C_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Exercice 6 :

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.