Dérivabilité et Systèmes linéaires

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.

   Soit $f:\ [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$. $\quad (a<b)$

   Alors, il existe $c \in\ ]a\,;b[$ tel que :

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c) \iff f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

2. Énoncer un théorème de dérivabilité vrai dans $\mathbb{R}$ qui ne l'est pas dans $\mathbb{C}$ différent de celui de la question (1).

   Le théorème de Rolle

3. Énoncer un théorème de dérivabilité vrai dans $\mathbb{R}$ qui persiste dans $\mathbb{C}$.

   L'inégalité des accroissements finis

4. Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & 2z & = & 0\\ -2x & + & y & + & -2z & = & 1\\ & & y & + & 2z & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & 2z & = & 0\\ -2x & + & y & + & -2z & = & 1\\ & & y & + & 2z & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & 2z & = & 0\\ -x & & & + & -2z & = & 1\\ & & y & + & 2z & = & -1 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & 2z & = & 0\\ & & & & 0 & = & 1\\ & & y & + & 2z & = & -1 \end{array}\right.$$

Le système est incompatible.

$$\mathscr{S}=\emptyset.$$

Dérivabilité et Systèmes linéaires

5. Même question avec
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ -2x & + & y & + & -z & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ -2x & + & y & + & -z & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$
$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$
$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -z \\ y & = & 1-z \\ z & = & z \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

C'est la droite (affine) passant par le point $(0\,;1\,;0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\,(1\,;1\,;-1)$. Un seul degré de liberté donc.
$$\mathscr{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'inconnue z joue le rôle d'inconnue secondaire. On aurait pu prendre y ou x.

Dérivabilité et Systèmes linéaires

1. Énoncer le théorème de prolongement de classe $\mathscr{C}^1$.

   Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ continue sur I et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$.

   Si $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.

2. Énoncer un théorème de dérivabilité vrai dans $\mathbb{R}$ qui persiste dans $\mathbb{C}$.

   Le lien entre la nullité sur un intervalle de la dérivée d'une fonction dérivable et sa constance sur celui-ci.

3. Énoncer un théorème de dérivabilité vrai dans $\mathbb{R}$ qui ne l'est pas dans $\mathbb{C}$ différent de celui de la question (1).

   L'annulation de la dérivée aux extrema locaux.

4. Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & -2y & + & z & = & -2 \\ x & + & y & + & -2z & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & -2y & + & z & = & -2 \\ x & + & y & + & -2z & = & 4 \end{array}\right. \underset{\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & & & 0 & = & 3 \\ x & + & -2y & + & z & = & -2 \\ x & + & y & + & -2z & = & 4 \end{array}\right.$$

$\mathscr{S} = \emptyset$. Le système incompatible.

5. Même question avec

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & -1 \\ x & + & y & + & -z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & -1 \\ x & + & y & + & -z & = & 1 \end{array}\right. \underset{\substack{\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & & & 2z & = & 0 \\ 2x & & & & & = & 0 \\ x & + & y & + & -z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 0 \\ y & = & 1 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

$\mathscr{S} = \{(0\,;1\,;0)\}$. Uun unique point.

Dérivabilité et Systèmes linéaires