Systèmes linéaires

I/ Systèmes échelonnés

Exercice 1 : Les matrices suivantes sont-elles échelonnées par lignes ?

NB : Les $*$ désignent des nombres non nuls.

1. $\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2 : Pour chaque système suivant, déterminer :

a) la matrice augmentée du système ;
b) le nombre d'équation n, le nombre d'inconnues p ;
c) le rang r ;
d) la compatibilité ou l'incompatibilité ;
e) le nombre de degrés de liberté ;
f) les inconnues principales et secondaires.

On ne demande pas de résoudre le système [1]

1. $\begin{cases} 2x - 7y + t = -13 \\ 2z + 9t = 6 \\ -5t = 9 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -x_2 + 15x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ 3x_4 + 7x_5 = -5 \\ 0x_1 = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} a + b - d = -7 \\ 15b - 5c + 29d = 33 \\ 13c + d = -15 \\ 14d = 11 \\ 0c - 0d = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 - x_3 + 8x_7 = 5 \\ 2x_3 + 2x_4 - 6x_5 + 13x_7 = -1 \\ x_6 - 29x_7 = 3 \end{cases}$

[1]. ... mais tout élève sérieux le fera pour s'entraîner bien sûr !

Exercice 3 : Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 4x+2y+z=4 \\ 4x-2y+z=-2 \\ 4x-y=0,5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 5x+3y+4z=-1 \\ 2x+3y+z=-1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x-y=0 \\ 2x-2y+2z=2 \\ -x+y-z=1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 3x+2y-z=5 \\ 2x+3y+z=5 \\ 3x+7y+4z=10 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x-y+t=1 \\ 2x-2y+2z=2 \\ -x+y-z=-1 \end{cases}$
6. $\begin{cases} -2x+3z=7 \\ -4x-2y+z=3 \\ 2x+2y+2z=4 \\ -10x-6y=2 \end{cases}$
7. $\begin{cases} x+2y+z &= 4 \\ 2x-2y+z &= -2 \\ 3x-y &= 0,5 \end{cases}$
8. $\begin{cases} 4x+3y+5z &= 1 \\ 2x+3y+z &= -1 \\ x+yz &= 1 \end{cases}$
9. $\begin{cases} x-y &= 0 \\ 2x-y-z &= 1 \\ -x+z &= 1 \end{cases}$
10. $\begin{cases} 3x+2y-z &= 5 \\ 2x+3y+z &= 5 \\ 3x+7y+4z &= 10 \end{cases}$
11. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3 &= 5 \\ x_2+2x_3 &= 2 \end{cases}$
12. $\begin{cases} x_1++2x_3 &= 3 \\ x_2-x_3 &= -2 \\ x_4 &= -7 \end{cases}$

Exercice 4 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ avec la méthode du pivot le système :

$$\begin{cases} x+y=2i \\ y+z=-2 \\ z+t=-2i \\ x+t=2 \end{cases}$$

2. Soient les quatre points B_1, B_2, B_3 et B_4 d'affixes respectives $i,-1,-i$ et 1 . Existe-t-il un quadrilatère tel que les points B_1, B_2, B_3 et B_4 soient les milieux de ses côtés ? Si oui, est-il unique ?

Exercice 5 : Équilibrer les équations chimiques suivantes :

1. $NH_3 + O_2 \to NO + H_2O$.
2. $C_2H_6 + O_2 \to CO_2 + H_2O$.

II/ Systèmes compatibles

Exercice 6 : Résoudre le système suivant en discutant suivant la valeur des paramètres :

1. $\begin{cases} x+2y+kz &= 1 \\ 3x+4y+2z &= k \\ 2x+3y-z &= 1 \end{cases}$,
2. $\begin{cases} mx+y+z &= 1 \\ x+my+z &= m \\ x+y+mz &= m^2 \end{cases}$,
3. $\begin{cases} 2x+y-3z=a \\ 3x+2y+z=a+3 \\ 7x+4y-5z=2a+5 \end{cases}$

Exercice 7 :

1. Résoudre le système suivant en discutant selon les paramètres réels a, b, c :

$$\begin{cases} 2x - y + z = a \\ -x + 3y - 5z = b \\ 8x - 9y + 13z = c \end{cases}$$

2. Résoudre le système précédent pour $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ puis pour $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 : Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ, a, b, c, d le système :

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccccccc} (1+\lambda)x & + & y & + & z & + & t & = & a \\ x & + & (1+\lambda)y & + & z & + & t & = & b \\ x & + & y & + & (1+\lambda)z & + & t & = & c \\ x & + & y & + & z & + & (1+\lambda)t & = & d \end{array} \right.$$

Exercice 9 :

1. Résoudre le système suivant à l'aide de la méthode de Gauss-Jordan, en discutant selon la valeur du paramètres réel a :

$$\begin{cases} ax + y + z + t = 0 \\ x + ay + z + t = 0 \\ x + y + az + t = 0 \\ x + y + z + at = 0 \end{cases}$$

2. Refaire l'exercice précédent en introduisant l'inconnue auxiliaire $s = x + y + z + t$, et sans utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan.

III/ Rang et inversibilité de matrices

Exercice 10 :

1. Déterminer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$.

2. Inverser, si possible, les matrices suivantes(on suppose $n \geqslant 2$) :

   (a) $(\min(i,j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$

Exercice 11 : Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leurs inverses.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$
5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
9. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 12 (M **anti-symétrique** $\Rightarrow \mathrm{I}+\mathrm{M}$ **est inversible) :**
Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ anti-symétrique.

1. Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ considéré comme une matrice à une seule colonne.

   Calculer $\mathrm{X}^\top\mathrm{X}$ et montrer que $\mathrm{X}^\top\mathrm{X} \geqslant 0$ et $\mathrm{X}^\top\mathrm{X} = 0$ si, et seulement si $\mathrm{X} = 0_{\mathbb{R}^n}$.
2. (a) Soit X un vecteur tel $(\mathrm{I}+\mathrm{M})\mathrm{X} = 0$. En calculant $(\mathrm{MX})^\top(\mathrm{MX})$ de deux manières différentes montrer que $\mathrm{X} = 0_{\mathbb{R}^n}$.
   (b) En déduire que $\mathrm{I}+\mathrm{M}$ est inversible.
3. Soit $\mathrm{A} = (\mathrm{I}-\mathrm{M})(\mathrm{I}+\mathrm{M})^{-1}$.
   (a) Montrer que $(\mathrm{I}-\mathrm{M})$ et $(\mathrm{I}+\mathrm{M})^{-1}$ commutent.
   (b) Déterminer A^{-1}
   (c) Montrer que $\mathrm{A}^\top = \mathrm{A}^{-1}$.