Systèmes linéaires

I/ Systèmes échelonnés

Exercice 1 : Les matrices suivantes sont-elles échelonnées par lignes ?

NB : Les $*$ désignent des nombres non nuls.

1. $\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2 : Pour chaque système suivant, déterminer :

a) la matrice augmentée du système ;
b) le nombre d'équation n, le nombre d'inconnues p ;
c) le rang r ;
d) la compatibilité ou l'incompatibilité ;
e) le nombre de degrés de liberté ;
f) les inconnues principales et secondaires.

On ne demande pas de résoudre le système [1]

1. $\begin{cases} 2x - 7y + t = -13 \\ 2z + 9t = 6 \\ -5t = 9 \end{cases}$

2. $\begin{cases} -x_2 + 15x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ 3x_4 + 7x_5 = -5 \\ 0x_1 = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} a + b - d = -7 \\ 15b - 5c + 29d = 33 \\ 13c + d = -15 \\ 14d = 11 \\ 0c - 0d = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 - x_3 + 8x_7 = 5 \\ 2x_3 + 2x_4 - 6x_5 + 13x_7 = -1 \\ x_6 - 29x_7 = 3 \end{cases}$

[1]. ... mais tout élève sérieux le fera pour s'entraîner bien sûr !

Correction :

1. — Matrice augmentée $\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -7 & 0 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-5} & 9 \end{array}\right)$
   — $n = 3,\ p = 4$
   — $r = 3$
   — Compatible
   — 1 degré de liberté
   — inconnues principales : x, z, t

   inconnue secondaire : y

2. — Matrice augmentée $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & \boxed{-1} & 15 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$
   — $n = 3,\ p = 5$
   — $r = 2$
   — Non compatible
   — 3 degré de liberté
   — inconnues principales : x_2, x_4

   inconnues secondaires : x_1, x_3, x_5

3. — Matrice augmentée $\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & \boxed{15} & -5 & 29 & 33 \\ 0 & 0 & \boxed{13} & 1 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{14} & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
   — $n = 5,\ p = 4$
   — $r = 4$
   — Compatible
   — 0 degré de liberté : 1 solution.
   — inconnues principales : a, b, c, d

   Pas d'inconnue secondaire.

4. — Matrice augmentée $\left(\begin{array}{ccccccc|c} \boxed{3} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 2 & -6 & 0 & 13 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -29 & 3 \end{array}\right)$
   — $n = 3,\ p = 7$
   — $r = 3$
   — Compatible
   — 4 degrés de liberté
   — inconnues principales : x_1, x_3, x_6

   inconnues secondaires : x_2, x_4, x_5, x_7

Systèmes linéaires

Exercice 3 : Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 4x+2y+z=4 \\ 4x-2y+z=-2 \\ 4x-y=0,5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x+3y+4z=-1 \\ 2x+3y+z=-1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-y=0 \\ 2x-2y+2z=2 \\ -x+y-z=1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x+2y-z=5 \\ 2x+3y+z=5 \\ 3x+7y+4z=10 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x-y+t=1 \\ 2x-2y+2z=2 \\ -x+y-z=-1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -2x+3z=7 \\ -4x-2y+z=3 \\ 2x+2y+2z=4 \\ -10x-6y=2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+2y+z &= 4 \\ 2x-2y+z &= -2 \\ 3x-y &= 0,5 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4x+3y+5z &= 1 \\ 2x+3y+z &= -1 \\ x+yz &= 1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x-y &= 0 \\ 2x-y-z &= 1 \\ -x+z &= 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x+2y-z &= 5 \\ 2x+3y+z &= 5 \\ 3x+7y+4z &= 10 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3 &= 5 \\ x_2+2x_3 &= 2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1++2x_3 &= 3 \\ x_2-x_3 &= -2 \\ x_4 &= -7 \end{cases}$

Correction :

1. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$

Donc, $\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},-1\right)\right\}$

2. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{array}\right) L_1 \leftrightarrow L_3$

$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$

Donc, $\mathcal{S}=\{(-4,1,4)\}$

3. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

Donc, $\mathcal{S}=\emptyset$

4. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 4 & 10 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Donc, $\mathcal{S}=\{(1+z,1-z,z)\,,z\in\mathbb{R}\}$

5. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Donc, $\mathcal{S}=\{(1+y-t,y,t,t)\,,(y,t)\in\mathbb{R}^2\}$

Systèmes linéaires

6. $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 3 & 7 \\ -4 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ -10 & -6 & 0 & 2 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$\text{Donc, } \mathcal{S} = \left\{\left(\frac{-7+3z}{2}, \frac{11-5z}{2}, z\right), z \in \mathbb{R}\right\}$$

Exercice 4 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ avec la méthode du pivot le système :

$$\begin{cases} x+y=2i \\ y+z=-2 \\ z+t=-2i \\ x+t=2 \end{cases}$$

2. Soient les quatre points B_1, B_2, B_3 et B_4 d'affixes respectives $i, -1, -i$ et 1 . Existe-t-il un quadrilatère tel que les points B_1, B_2, B_3 et B_4 soient les milieux de ses côtés ? Si oui, est-il unique ?

Exercice 5 : Équilibrer les équations chimiques suivantes :

1. $NH_3 + O_2 \to NO + H_2O$.
2. $C_2H_6 + O_2 \to CO_2 + H_2O$.

Correction :

1. Il s'agit de trouver a, b, c et d de sorte que le nombre d'atomes de chaque élément soit le même de chaque côté de l'équation

$$a\mathrm{NH}_3 + b\mathrm{O}_2 \to c\mathrm{NO} + d\mathrm{H}_2\mathrm{O}.$$

Les réels a, b, c, d doivent satisfaire le système

$$\begin{cases} a &= c \\ 3a &= 2d \\ 2b &= c+d \end{cases} \iff \left\{\begin{array}{lllll} a & -c & 0 & & \\ 3a & & -c & 0d & =0 \\ & 2b-c & -d & =0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lll} a & -c & =0 \\ & 3c-2d & =0 \\ 2b-c-d & & =0 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \qquad \iff \begin{cases} a = 2d/3 \\ b = 5d/6 \\ c = 2d/3 \end{cases}$$

Puisqu'on cherche une solution entière, on peut choisir la valeur $d = 6$, et on a donc équilibré la réaction chimique en l'écrivant

$$4\mathrm{NH}_3 + 5\mathrm{O}_2 \to 4\mathrm{NO} + 6\mathrm{H}_2\mathrm{O}.$$

2. On procède en suivant exactement la même méthode, et on équilibre l'équation chimique en

$$2\mathrm{C}_2\mathrm{H}_6 + 7\mathrm{O}_2 \to 4\mathrm{CO}_2 + 6\mathrm{H}_2 0.$$

II/ Systèmes compatibles

Exercice 6 : Résoudre le système suivant en discutant suivant la valeur des paramètres :

1. $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+kz & = & 1 \\ 3x+4y+2z & = & k \\ 2x+3y-z & = & 1 \end{array}\right.$, 2. $\left\{\begin{array}{rcl} mx+y+z & = & 1 \\ x+my+z & = & m \\ x+y+mz & = & m^2 \end{array}\right.$, 3. $\begin{cases} 2x+y-3z=a \\ 3x+2y+z=a+3 \\ 7x+4y-5z=2a+5 \end{cases}$

Correction :

3. $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & a \\ 3 & 2 & 1 & a+3 \\ 7 & 4 & -5 & 2a+5 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & a \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{11}{2} & 3-\frac{1}{2}a \\ 0 & 0 & 0 & 2-a \end{array}\right)$

— Si $a \neq 2$, $\mathcal{S} = \emptyset$.

— Si $a = 2$, $A \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ et $\mathcal{S} = \{(-1+7z, 4-11z, z), z \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 7 :

1. Résoudre le système suivant en discutant selon les paramètres réels a, b, c :

$$\begin{cases} 2x-y+z=a \\ -x+3y-5z=b \\ 8x-9y+13z=c \end{cases}$$

2. Résoudre le système précédent pour $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ puis pour $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Correction : $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & a \\ -1 & 3 & -5 & b \\ 8 & -9 & 13 & c \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -5 & b \\ 2 & -1 & 1 & a \\ 8 & -9 & 13 & c \end{array}\right) \quad L_1 \leftrightarrow L_2$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -5 & b \\ 0 & 5 & -9 & a+2b \\ 0 & 15 & -27 & c+8b \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 8L_1 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -5 & b \\ 0 & 5 & -9 & a+2b \\ 0 & 0 & 0 & -3a+2b+c \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$$

— Si $-3a+2b+c \neq 0$ le système est incompatible : $\mathcal{S} = \emptyset$.

— Si $-3a+2b+c=0$, alors (S) $\iff \begin{cases} -x+3y-5z=b \\ 5y-9z=a+2b \\ 0=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x+3y=5z+b \\ 5y=9z+a+2b \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x-3y=-5z-b & L_1 \leftarrow -L_1 \\ y=\frac{9}{5}z+\frac{1}{5}a+\frac{2}{5}b & L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=\frac{2}{5}z+\frac{3}{5}a+\frac{1}{5}b & L_1 \leftarrow L_1+3L_2 \\ y=\frac{9}{5}z+\frac{1}{5}a+\frac{2}{5}b \end{cases}$$

Donc, $\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{2z+3a+b}{5}, \frac{9z+a+2b}{5}, z\right), z\in\mathbb{R}\right\}$.

— Si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, on a $-3a+2b+c\neq 0$ donc $\mathcal{S}=\emptyset$.

— $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$, on a $-3a+2b+c=0$ puis $\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{2z+11}{5}, \frac{9z+6}{5}, z\right), z\in\mathbb{R}\right\}$.

Exercice 8 : Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ, a, b, c, d le système :

$$(S) \begin{cases} (1+\lambda)x + y + z + t = a \\ x + (1+\lambda)y + z + t = b \\ x + y + (1+\lambda)z + t = c \\ x + y + z + (1+\lambda)t = d \end{cases}$$

Correction :

1. On commence par simplifier le système en effectuant les opérations suivantes sur les lignes : $L_1 \leftarrow L_1 - L_4$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_4$:

$$(S) \iff \begin{cases} \lambda x - \lambda t = a-d \\ \lambda y - \lambda t = b-d \\ \lambda z - \lambda t = c-d \\ x + y + z + (1+\lambda)t = d \end{cases}$$

2. Traitons le cas particulier $\lambda=0$. Si $\lambda=0$ alors le système n'a des solutions que si $a=b=c=d$. Les solutions sont alors les (x,y,z,t) qui vérifie $x+y+z+t=d$. (C'est un espace de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$.)

3. Si $\lambda\neq 0$ alors on peut faire l'opération suivante sur la dernière ligne : $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{\lambda}L_1 - \frac{1}{\lambda}L_2 - \frac{1}{\lambda}L_3$ pour obtenir :

$$(S) \iff \begin{cases} \lambda x - \lambda t = a-d \\ \lambda y - \lambda t = b-d \\ \lambda z - \lambda t = c-d \\ (\lambda+4)t = d - \frac{1}{\lambda}(a+b+c-3d) \end{cases}$$

4. Cas particulier $\lambda = -4$. La dernière ligne devient $0 = a+b+c+d$. Donc si $a+b+c+d \neq 0$ alors il n'y a pas de solutions.

   Si $\lambda = -4$ et $a+b+c+d = 0$ alors existe une infinité de solutions :

$$\left\{\left(t - \frac{a-d}{4}, t - \frac{b-d}{4}, t - \frac{c-d}{4}, t\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \begin{pmatrix} -\dfrac{a-d}{4} \\ -\dfrac{b-d}{4} \\ -\dfrac{c-d}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

   La droite passant par $\left(-\frac{a-d}{4}, -\frac{b-d}{4}, -\frac{c-d}{4}, 0\right)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = \left(1,\ 1,\ 1,\ 1\right)$.

5. Cas général : $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq -4$. On calcule d'abord $t = \dfrac{1}{\lambda+4}\left(d - \dfrac{1}{\lambda}(a+b+c-3d)\right)$ et en remplaçant par la valeur de t obtenue on en déduit les valeurs pour $x = t + \dfrac{1}{\lambda}(a-d)$, $y = t + \dfrac{1}{\lambda}(b-d)$, $z = t + \dfrac{1}{\lambda}(c-d)$. Il existe donc une solution unique :

$$\left(\frac{(\lambda+3)a-b-c-d}{\lambda(\lambda+4)}, \frac{(\lambda+3)b-a-c-d}{\lambda(\lambda+4)}, \frac{(\lambda+3)c-a-b-d}{\lambda(\lambda+4)}, \frac{(\lambda+3)d-a-b-c}{\lambda(\lambda+4)}\right).$$

Exercice 9 :

1. Résoudre le système suivant à l'aide de la méthode de Gauss-Jordan, en discutant selon la valeur du paramètres réel a :

$$\begin{cases} ax+y+z+t=0 \\ x+ay+z+t=0 \\ x+y+az+t=0 \\ x+y+z+at=0 \end{cases}$$

2. Refaire l'exercice précédent en introduisant l'inconnue auxiliaire $s = x+y+z+t$, et sans utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan.

Correction :

1. $$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathrm{a} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \mathrm{a} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \mathrm{a} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \mathrm{a} & 0 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & \mathrm{a} & 0 \\ 1 & \mathrm{a} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \mathrm{a} & 1 & 0 \\ \mathrm{a} & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_4$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 - a\mathrm{L}_1 \end{array}$$

Systèmes linéaires

$$\underset{L}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 2-a-a^2 & 0 \end{array}\right) \quad L_4 \leftarrow L_4 + L_2$$

$$\underset{L}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-2a-a^2 & 0 \end{array}\right) \quad L_4 \leftarrow L_4 + L_3$$

Or, $3-2a-a^2 = (3+a)(1-a)$.

— Si $a=1$ alors $(S) \iff x+y+z+t=0 \iff x=-y-z-t$

$$\mathcal{S} = \left\{(-y-z-t, y, z, t), (y,z,t) \in \mathbb{R}^3\right\}.$$

— Si $a=-3$ alors $\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & a & 0 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$\mathcal{S} = \left\{(t,t,t,t), t \in \mathbb{R}\right\}.$$

— Si $a \notin \{1,-3\}$, alors $\mathcal{S} = \{(0,0,0,0)\}$.

2. Autre méthode : on pose $s = x+y+z+t$.

$$(S) \iff \begin{cases} x+y+z+t=s \\ ax+y+z+t=0 \\ x+ay+z+t=0 \\ x+y+az+t=0 \\ x+y+z+at=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z+t=s \\ (a-1)x+s=0 \\ (a-1)y+s=0 \\ (a-1)z+s=0 \\ (a-1)t+s=0 \end{cases}$$

— Si $a=1$ alors $(S) \iff x+y+z+t=0$

$$\mathcal{S} = \left\{(-y-z-t, y, z, t), (y,z,t) \in \mathbb{R}^3\right\}.$$

— Sinon, $x=y=z=t=\dfrac{s}{1-a}$:

$$(S) \iff \begin{cases} x+y+z+t=s \\ x=\frac{s}{1-a} \\ y=\frac{s}{1-a} \\ z=\frac{s}{1-a} \\ t=\frac{s}{1-a} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{4s}{1-a}=s \\ x=\frac{s}{1-a} \\ y=\frac{s}{1-a} \\ z=\frac{s}{1-a} \\ t=\frac{s}{1-a} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{(3+a)s}{1-a}=0 \\ x=\frac{s}{1-a} \\ y=\frac{s}{1-a} \\ z=\frac{s}{1-a} \\ t=\frac{s}{1-a} \end{cases}$$

— Si $a=-3$ alors $\mathcal{S} = \{(t,t,t,t), t \in \mathbb{R}\}$.
— Si $a \notin \{1,-3\}$, alors $\mathcal{S} = \{(0,0,0,0)\}$.

III/ Rang et inversibilité de matrices

Exercice 10 :

1. Déterminer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$.
2. Inverser, si possible, les matrices suivantes(on suppose $n \geqslant 2$) :

   (a) $(\min(i,j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$

Exercice 11 : Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leurs inverses.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$
5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
9. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Correction :

1. Soient $(x\,;y\,;z)$ et $(a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3$. On applique la méthode en considérant le système :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & + & z & = & a \\ x & + & y & + & 2z & = & b \\ x & + & y & + & z & = & c \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & b \\ 2x & + & 3y & + & z & = & a \quad \mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_1 \\ x & + & y & + & z & = & c \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x + y + 2z = b \\ y - 3z = a - 2b \qquad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1 \\ z = b - c \qquad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccccl} x & + & y & & = & & & -b & + & 2c & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ & & y & & = & a & + & b & - & 3c & L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \\ & & & z & = & & & b & - & c & \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccccl} x & & & = & -a & & -2b & + & 5c & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ & y & & = & a & + & b & - & 3c & \\ & & z & = & & & b & - & c & \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

On a réussi à résoudre le système pour TOUT second membre $(a\,;b\,;c) \in \mathbb{R}^3$ donc A est inversible d'inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12 (M anti-symétrique $\Rightarrow I + M$ est inversible) :
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ anti-symétrique.

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ considéré comme une matrice à une seule colonne.

   Calculer $X^\top X$ et montrer que $X^\top X \geqslant 0$ et $X^\top X = 0$ si, et seulement si $X = 0_{\mathbb{R}^n}$.
2. (a) Soit X un vecteur tel $(I+M)X = 0$. En calculant $(MX)^\top(MX)$ de deux manières différentes montrer que $X = 0_{\mathbb{R}^n}$.
   (b) En déduire que $I + M$ est inversible.
3. Soit $A = (I - M)(I + M)^{-1}$.
   (a) Montrer que $(I - M)$ et $(I + M)^{-1}$ commutent.
   (b) Déterminer A^{-1}
   (c) Montrer que $A^\top = A^{-1}$.

Correction :

1. Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a $X^\top X = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$

   Commentaires : *On note $\|X\|^2 = X^\top X$. $\|X\|$ est la norme ou la longueur du vecteur X.*

   De ce calcul on déduit d'une part que $X^\top X \geqslant 0$. Et aussi que $X^\top X = 0$ si et seulement si X est le vecteur nul.
2. (a) Soit un vecteur X vérifiant $(I + M)X = 0 \iff MX = -X$.

D'une part, $(MX)^\top(MX) = \|MX\|^2 \geqslant 0$.

D'autre part,

$$\begin{aligned}
(MX)^\top(MX) &= (MX)^\top(-X) \quad \text{car } (I+M)X = 0 \text{ donc } MX = -X \\
&= X^\top M^\top(-X) \quad \text{car } (AB)^\top = B^\top A^\top \\
&= X^\top(-M)(-X) \quad \text{car } M^\top = -M \\
&= X^\top MX \\
&= X^\top(-X) \\
&= -X^\top X \\
&= -\|X\|^2 \leqslant 0
\end{aligned}$$

Seule possibilité $\|X\|^2 = 0$ donc $X = 0_{\mathbb{R}^n}$ et donc $I + M$ inversible.

(b) Promenade de santé : l'unique solution de $(I+M)X = 0$ est le vecteur nul donc $I+M$ est inversible.

3. (a) Montrons que $I+M$ et $(I-M)^{-1}$ commutent.

Tout d'abord $I+M$ et $I-M$ commutent car $(I+M)(I-M) = I - M^2 = (I-M)(I+M)$.

Ensuite, les matrices étant inversibles :

$$\begin{aligned}
(I+M)(I-M) = (I-M)(I+M) &\implies (I-M)^{-1}(I+M)(I-M) = (I-M)^{-1}(I-M)(I+M) \\
&\implies (I-M)^{-1}(I-M)(I+M) = (I-M)^{-1}(I-M)(I+M) \\
&\implies (I+M) = (I-M)^{-1}(I-M)(I+M) \\
&\implies (I+M)(I-M)^{-1} = (I-M)^{-1}(I-M)(I+M)(I-M)^{-1} \\
&\implies (I+M)(I-M)^{-1} = (I-M)^{-1}(I+M)(I-M)(I-M)^{-1} \\
&\implies (I+M)(I-M)^{-1} = (I-M)^{-1}(I+M).
\end{aligned}$$

(b) Calculons A^{-1}.

$$A^{-1} = \left((I-M) \times (I+M)^{-1}\right)^{-1} = \left((I+M)^{-1}\right)^{-1} \times (I-M)^{-1} = (I+M) \times (I-M)^{-1}$$

Commentaires : *N'oubliez pas que* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(c) Calculons $A^\top$.

$$\begin{aligned}
A^\top &= \left((I-M) \times (I+M)^{-1}\right)^\top \\
&= \left((I+M)^{-1}\right)^\top \times (I-M)^\top \quad \text{car } (AB)^\top = B^\top A^\top \\
&= \left((I+M)^\top\right)^{-1} \times (I-M)^\top \quad \text{car } \left(A^{-1}\right)^\top = \left(A^\top\right)^{-1} \\
&= (I+M^\top))^{-1} \times (I-M^\top) \quad \text{car } (A+B)^\top = A^\top + B^\top \\
&= (I-M)^{-1} \times (I+M) \quad \text{car ici } M^\top = -M
\end{aligned}$$

Conclusion, $A^{-1} = A^\top$.

Systèmes linéaires

IV/ Quelques petits problèmes de l'école primaire

Exercice 13 : Paul a des gros clous et des petits clous. Tous les gros clous ont la même masse, et tous les petits clous aussi. 50 gros clous et 120 petits clous pèsent ensemble 165 g. 70 gros clous et 90 petits clous pèsent ensemble 192 g. Calculer la masse d'un gros clous et celle d'un petit clou.

Exercice 14 : L'âne dit au mulet : « De quoi te plains-tu ? Si je prenais un de tes sacs, j'en aurais alors le double de toi, si tu prenais un des miens, nous aurions alors la même charge ». Combien de sacs portent-ils chacun ?

Exercice 15 : Trois pirates se partagent 300 pièces d'or. Le chef a pour part le double de la somme obtenue en additionnant les deux autres parts. La part du deuxième comporte 10 pièces de plus que celle du troisième. Déterminer la part de chacun.

Exercice 16 : Une personne dépense le quart de son salaire pour se loger et les $\frac{3}{7}$ pour se nourrir. Il lui reste 3150 F pour ses autres dépenses. Quel est son salaire ?

Exercice 17 : Voici un problème de Nicolas Chuquet (1445-1500) : « Des frères se partagent un héritage. Le premier prend 100 euros et 10% du reste. Le second prend 200 euros et 10% du nouveau reste. Le troisième prend 300 euros et 10% du nouveau reste et ainsi de suite jusqu'au dernier. Ils ont alors la même part. À combien se monte l'héritage ? Combien y a-t-il de frères ? »

Exercice 18 : Un batelier descend une rivière de 120 km à vitesse constante v(km/j). Par contre, il la remonte en mettant un jour de plus car il fait 6 km/j de moins qu'en descendant. Combien de jours a-t-il mis pour descendre ?