

Quelques encadrements et un système

Exercice 1 –

1. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, t - \frac{t^3}{6} \leq \sin(t) \leq t \quad \text{et} \quad 1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos(t) \leq 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}.$$

2. En déduire que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \left(\cos\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right) - 1 \right)$$

convergent vers des limites à préciser.

Correction : L'exercice est un peu répétitif mais s'enchaîne bien en appliquant l'inégalité de la moyenne :

1.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \cos(t) \leq 1$$

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \int_0^t \cos(x) dx \leq \int_0^t 1 dx \Leftrightarrow \sin(t) \leq t. \quad (\text{XVII.1})$$

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+, \int_0^t \sin(x) dx \leq \int_0^t x dx \Leftrightarrow 1 - \cos(t) \leq \frac{t^2}{2}.$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos(t). \quad (\text{XVII.2})$$

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+, \int_0^t 1 - \frac{x^2}{2} dx \leq \int_0^t \cos(x) dx \Leftrightarrow t - \frac{t^3}{6} \leq \sin(t). \quad (\text{XVII.3})$$

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+, \int_0^t x - \frac{x^3}{6} dx \leq \int_0^t \sin(x) dx \Leftrightarrow \cos(t) \leq 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}. \quad (\text{XVII.4})$$

Les encadrements (XVII.1) et (XVII.3) nous donnent :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, t - \frac{t^3}{6} \leq \sin(t) \leq t.$$

Tandis que (XVII.2) et (XVII.4) s'écrivent ensemble :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, 1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos(t) \leq 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}.$$

2. Il suffit d'appliquer la question précédente :

$$\begin{aligned} \frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6} &\leq \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2} \\ \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} - \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{6n^6} &\leq \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \\ \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^n k^3 &\leq \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \\ \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^n k^3 &\leq \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{n(n+1)}{2n^2} \end{aligned}$$

Or, $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. D'où,

$$\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{6n^6} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{6n^6} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Même chose pour l'autre :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{k^2}{2n^3} &\leq \cos\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right) \leq 1 - \frac{k^2}{2n^3} + \frac{k^4}{24n^6} \\ -\frac{k^2}{2n^3} &\leq \cos\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right) - 1 \leq -\frac{k^2}{2n^3} + \frac{k^4}{24n^6} \\ -\frac{1}{2n^3} \sum_{k=1}^n k^2 &\leq \sum_{k=1}^n \left(\cos\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right) - 1\right) \leq -\frac{1}{2n^3} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{1}{24n^6} \sum_{k=1}^n k^4 \\ -\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^3} &\leq \sum_{k=1}^n \left(\cos\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right) - 1\right) \leq -\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^3} + \frac{1}{24n^6} \sum_{k=1}^n k^4 \\ -\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^3} &\leq \sum_{k=1}^n \left(\cos\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right) - 1\right) \leq -\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^3} + \frac{1}{24n^6} \times (n \times n^4) \quad \text{ouf!} \\ -\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^3} &\leq \sum_{k=1}^n \left(\cos\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right) - 1\right) \leq -\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^3} + \frac{n^5}{24n^6}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^3} + \frac{n^5}{24n^6} = -\frac{1}{6}$, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\cos\left(\frac{k}{n\sqrt{n}}\right) - 1\right) = -\frac{1}{6}.$$

Exercice 2 – Déterminer le nombre de solution(s) du système en fonction de m . Si le nombre de solutions est infini, on précisera le nombre de degré de liberté de l'espace des solutions.

$$\begin{cases} x + my + 2z = m \\ -2x + y + (m-2)z = 1 \\ mx + y + 2z = 2m-1 \end{cases}$$

Correction :

$$\begin{cases} x + my + 2z = m \\ -2x + y + (m-2)z = 1 \\ mx + y + 2z = 2m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + my + 2z = m \\ (1+2m)y + (m+2)z = 1+2m \\ (m^2-1)y + 2(m-1)z = m^2-2m+1 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2$
 $L_3 \leftarrow mL_1 - L_3$ si $m = 0$ pas grave ici.
 Ça revient à ne rien faire.

$$L_3 \leftarrow \frac{1}{m-1}L_3 \text{ si } m \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + my + 2z = m \\ (1+2m)y + (m+2)z = 1+2m \\ (m+1)y + 2z = m-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ m(m-1)y = m^2-3m-4 \\ (m+1)y + 2z = m-1 \end{cases}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$
 $L_2 \leftarrow (m+2)L_3 - 2L_2$ si $m = -2$
 pas grave ici. Ça revient à ne rien faire.

$$\begin{cases} m(m-1)x = 2(m^2-2m-2) \\ m(m-1)y = m^2-3m-4 \\ 2m(m-1)z = 4(2m+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2(m^2-2m-2)}{m(m-1)} \\ y = \frac{m^2-3m-4}{m(m-1)} \\ z = \frac{2(2m+1)}{m(m-1)} \end{cases}$$

$L_1 \leftarrow m(m-1)L_1 + L_2$ si $m \neq 0, 1$
 $L_3 \leftarrow m(m-1)L_3 - (m+1)L_2$ si $m = -1$
 pareil que pour -2

Une unique solution : le point pas très beau au dessus.

$$\mathcal{S}_m = \left\{ \left(\frac{2(m^2-2m-2)}{m(m-1)}; \frac{(m+1)(m-4)}{m(m-1)}; \frac{2(2m+1)}{m(m-1)} \right), m \neq 0, 1 \right\}.$$

Si $m = 0$:

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ -2x + y - 2z = 1 \\ y + 2z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ -x - 2z = 1 \\ y + 2z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ 0 = 1 \\ y + 2z = -1 \end{cases}$$

Le système est incompatible. Il n'a pas de solutions.

$$\mathcal{S}_0 = \emptyset.$$

Si $m = 1$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ -2x + y - z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 1 - z \\ z = z \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

C'est la droite (affine) passant par le point $(0; 1; 0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(1; 1; -1)$. Un seul degré de liberté donc.

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$