Matrices - Suites - Fonctions

1 août 2025

Durée : **4** heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Le sujet est composé de **3** exercices indépendants.

Exercice 1 – Soit $g : \begin{array}{rcl} \mathrm{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{2-\ln(x)}. \end{array}$

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction g.

2. Donner les limites de g aux extrémités de D.

3. Dresser le tableau de variations complet de g en justifiant.

4. On note $\mathrm{I} = [1\,;\,\mathrm{e}]$. Justifier que $g(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$.

5. (a) Énoncer **rigoureusement** le théorème donnant l'inégalité des accroissements finis.
   (b) Montrer que g est $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne sur I.

6. Pour $x \in \mathrm{D}$, on note $h(x) = x^2 + \ln(x) - 2$.

   Montrer que g admet un unique point fixe $\alpha \in \mathrm{I}$.

On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 \in \mathrm{I}$ et $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \ x_{n+1} = \sqrt{2-\ln(x_n)}$.

7. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que tous ses termes appartiennent à I.

8. (a) Si $n \in \mathbb{N}$, justifier que $|x_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|x_n - \alpha|$.
   (b) En déduire que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \ |x_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |x_0 - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
   (c) Qu'en déduit-on sur la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

9. Déterminer $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que x_N soit une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

10. Écrire une fonction `valeur_approchee(k)` en langage Python renvoyant une valeur approchée de α à 10^{-k} près (l'argument `k` est de type `int`). On pourra initialiser la suite en prenant $x_0 = 1$. Commenter la fonction de façon pertinente.

Exercice 2 – L'objet de ce problème est d'étudier quelques propriétés des suites $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\quad \mathrm{I}_n = \int_0^2 x^n\ \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J}_n = \frac{1}{2^{n+1}}\mathrm{I}_n.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $f_n(x) = x^n\ \mathrm{e}^x$.

1. (a) Si $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de I_n.
   (b) Calculer I_0 et I_1 ainsi que J_0 et J_1.

2. *Étude de la fonction f_2.*

   (a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_2(x)}{x}$. Qu'en déduit-on sur la courbe représentative de f_2 ?
   (b) Dresser le tableau de variations complet de f_2 sur $\mathbb{R}_+$.

3. *Étude des variations de la suite* $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall\ x \in [0\,;2]\,,\ \ f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^2\, x^n$. En déduire que $0 \leqslant \mathrm{J}_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^2}{n+1}$.

   (b) Quelle est la limite de la suite $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathrm{I}_{n+1} = 2^{n+1}\,\mathrm{e}^2 - (n+1)\mathrm{I}_n$.

   (b) En déduire les valeurs de I_2 et de J_2.

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(\dfrac{x}{2} - 1\right) x^n\, \mathrm{e}^x. \end{array}$

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall\ x \in [0\,;2]$, $g_n(x) \leqslant 0$.

   (b) En déduire que la suite $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   (c) Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{J}_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - \dfrac{n+1}{2}\mathrm{J}_n$.

   (d) En déduire que, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\ \mathrm{J}_n \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^2}{n+3}$.

   (e) En déduire la limite de la suite $(n\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. *Une somme infinie ?*

   (a) En procédant par récurrence, montrer que :

   $$\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{J}_n = \frac{(-1)^n\, n!\, \mathrm{e}^2}{2^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!} - e^{-2} \right).$$

   (b) Si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $n \geqslant 3$, montrer que $\dfrac{n!}{2^n} \geqslant \dfrac{n}{4}$. Que peut-on en déduire pour $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{2^n}$?

   (c) Que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!}$?

   En fin d'année, on notera cette limite $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-2)^k}{k!}$. *Une telle somme infinie est appelée "série". L'année prochaine vous y verrez le développement de* $\exp$ *en série entière...*

Exercice 3 –

Définition :

— On dit qu'une matrice ligne ou colonne est **stochastique** lorsque ses coefficients sont tous positifs et que la somme de ses coefficients vaut 1.

   Par exemple, la matrice colonne $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ *est stochastique car* $\dfrac{1}{2} \geqslant 0$, $\frac{1}{6} \geqslant 0$, $\dfrac{1}{3} \geqslant 0$ *et* $\dfrac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dfrac{1}{3} = 1$.

— On dit qu'une matrice carrée est stochastique lorsque chacune de ses lignes l'est.

Partie A : Des propriétés des matrices stochastiques

Dans cette partie, on considère $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec des coefficients positifs ou nuls. Montrer que A est stochastique si et seulement si $\mathrm{AX} = \mathrm{X}$.

2. Soient $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\mathrm{B} = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Soit $(i;j) \in [\![1\,;n]\!]^2$. Rappeler la formule donnant le coefficient sur la ligne i et la colonne j de la matrice produit AB.
   (b) En déduire que si les coefficients de A et de B sont positifs alors il en est de même de ceux de AB.
   (c) En déduire que si A et B sont stochastiques alors la matrice AB l'est aussi.

Partie B : Un exemple avec les matrices de taille $(3, 3)$

Dans cette partie, on étudie les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies par : $x_0 = y_0 = \dfrac{1}{2}$, $z_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(\mathcal{S}) : \quad \begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{3}x_n + \dfrac{1}{2}y_n + \frac{1}{6}z_n \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{1}{3}z_n \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{3}x_n + \frac{1}{6}y_n + \dfrac{1}{2}z_n \end{cases}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{X}_n = \left(\begin{smallmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{smallmatrix}\right)$.

3. Montrer que $(\mathcal{S})$ s'écrit sous forme matricielle $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{A}\mathrm{X}_n$, avec A une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on précisera.

4. Justifier que la matrice A est stochastique.

5. (a) On pose $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que Q est inversible et que $\mathrm{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
   (b) En déduire que $\mathrm{A} = \mathrm{Q}\mathrm{D}\mathrm{Q}^{-1}$ avec $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{X}_n = \mathrm{Q}\mathrm{D}^n\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{X}_0$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Exprimer X_n en fonction de n.
   (b) Montrer que le vecteur X_n est stochastique.

8. Prouver que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers des limites que l'on notera ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z.

9. Prouver que $\mathrm{L} = \begin{pmatrix} \ell_x \\ \ell_y \\ \ell_z \end{pmatrix}$ est stochastique et calculer AL.