Matrices - Suites - Fonctions

Exercice 1 – Soit $g : \begin{array}{rcl} \mathrm{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{2-\ln(x)}. \end{array}$

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction g.

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) \text{ existe } \iff \begin{cases} x > 0 \\ 2-\ln(x) \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) \leqslant 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x \leqslant \mathrm{e}^2, \end{cases}$$

Donc, $\mathrm{D} = \left]0\,;\,\mathrm{e}^2\right]$.

2. Donner les limites de g aux extrémités de D.

Correction : Comme $\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$, alors $2-\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ donc par composition, $g(x) = \sqrt{2-\ln(x)} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.

La courbe représentative de g admet donc une asymptote d'équation $x = 0$.

Commentaires : *Combien auront pensé à parler de l'asymptote et donner ainsi de la valeur à sa copie ?*

De même en e^2 : $2-\ln(x) \underset{x\to \mathrm{e}^2}{\longrightarrow} 0$ donc, par continuité de la fonction racine en 0, $\lim\limits_{x\to \mathrm{e}^2} g(x) = g(\mathrm{e}^2) = 0$.

3. Dresser le tableau de variations complet de g en justifiant.

Correction : Pour tout $x \in \left]0\,;\,\mathrm{e}^2\right[$, $2-\ln(x) > 0$ donc g est dérivable sur $\left]0\,;\,\mathrm{e}^2\right[$ et on a :

$$\forall\, x \left]0\,;\,\mathrm{e}^2\right[,\ g'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{2-\ln(x)}} = -\frac{1}{2x\sqrt{2-\ln(x)}} < 0.$$

La fonction g est donc strictement décroissante sur I.

Finalement :

x	0		e^2
$g'(x)$	‖	$-$	‖
g	‖ $+\infty$	↘	0

Commentaires : *Il est bien sûr tout à fait inutile de calculer la dérivée de g pour avoir ses variations mais comme on en a besoin après ...*

Matrices - Suites - Fonctions

4. On note $\mathrm{I} = [1\,;\,\mathrm{e}]$. Justifier que $g(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$.

Correction : Soit $x \in \mathrm{I}$. Par décroissance de g,

$$g(\mathrm{e}) \leqslant g(x) \leqslant g(1) \iff 0 < 1 \leqslant g(x) \leqslant \sqrt{2} < 2 < \mathrm{e}.$$

Donc I est stable par g.

Commentaires : *La continuité, la stricte monotonie ou encore le théorème de la bijection sont parfaitement inutiles ici.*

5. (a) Énoncer **rigoureusement** le théorème donnant l'inégalité des accroissements finis.

Correction : En substance, l'énoncé qui nous intéresse ici :

Soient I un intervalle non trivial et $f\colon \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction. Si :

(i) f est dérivable sur I,

(ii) il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f'| \leqslant \mathrm{M}$ sur I,

alors f est M-lipschitzienne sur I.

(b) Montrer que g est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur I.

Correction : D'après la question (3), g est dérivable sur $]0\,;\,\mathrm{e}^2[$, donc sur I et

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ |g'(x)| = \frac{1}{2x\sqrt{2-\ln(x)}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2-\ln(x)}},\ \text{car } x \geqslant 1.$$

D'autre part, $g(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$ entraîne $(0 <)\, 1 \leqslant g(x) = \sqrt{2-\ln(x)}$ puis $(0 <)\, \dfrac{1}{\sqrt{2-\ln(x)}} \leqslant 1$.

On en déduit que $|g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{2}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, g est bien $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur I.

Commentaires : *Pour ceux qui se seront essayé à écrire l'inégalité $|g(x) - g(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$, c'est pour tous $x, y \in \mathrm{I}$ et pas seulement pour 1 et e.*

En outre, pourquoi écrire des quotients ?

6. Pour $x \in \mathrm{D}$, on note $h(x) = x^2 + \ln(x) - 2$.

Montrer que g admet un unique point fixe $\alpha \in \mathrm{I}$.

Correction : Somme de $\ln$ et d'un polynôme, h est dérivable sur $\mathrm{D} \subset\,]0\,;+\infty[$ et

$$\forall\, x \in \mathrm{D},\ h'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0.$$

Donc h est continue et strictement croissante sur D et en particulier sur l'**intervalle** $\mathrm{I} \subset \mathrm{D}$.

D'après le théorème du même nom, h réalise donc une bijection de I sur son intervalle image $f(\mathrm{I}) = [h(1)\,;h(\mathrm{e}^2)] = [-1\,;\,\mathrm{e}^4]$.

Comme $0 \in [-1\,;\,\mathrm{e}^4]$, il admet un unique antécédent $\alpha \in \mathrm{I}$ par h *i.e.* tel que $h(\alpha) = 0$.

Commentaires : *Le théorème de Bolzano suffisait amplement mais à condition de préciser ensuite l'unicité à l'aide la bijectivité de g.*

Subséquemment,

$$\begin{aligned} h(\alpha) = 0 &\iff \alpha^2 + \ln(\alpha) - 2 = 0 \\ &\iff 2 - \ln(\alpha) = \alpha^2 \\ &\iff \sqrt{2-\ln(\alpha)} = \alpha \qquad \text{(stricte croissance de } t \longmapsto t^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+\text{)} \\ &\iff g(\alpha) = \alpha. \end{aligned}$$

La fonction g admet donc un point fixe $\alpha \in \mathrm{I}$. Le raisonnement par équivalences ci-dessus nous assure que c'est le seul.

On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 \in \mathrm{I}$ et $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \ x_{n+1} = \sqrt{2 - \ln(x_n)}$.

7. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que tous ses termes appartiennent à I.

Correction : On procède par récurrence. Soit (P_n) : « x_n existe et $x_n \in \mathrm{I}$ » pour $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Par hypothèse, $x_0 \in \mathrm{I}$ donc (P_0) est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que (P_n) est vraie. Comme $x_n \in \mathrm{I}$ et que I est stable par g (question 4), alors $g(x_n) = x_{n+1}$ existe et appartient à I, d'où (P_{n+1}).

Conclusion. Par récurrence, tous les termes x_n existent et sont dans I c'est-à-dire $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

8. (a) Si $n \in \mathbb{N}$, justifier que $|x_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|x_n - \alpha|$.

Correction : D'après la question (5b), g est $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne sur I, c'est-à-dire :

$$\forall\ (x,y) \in \mathrm{I}^2, \quad |g(x) - g(y)| \leqslant \frac{1}{2}\,|x-y|\,.$$

Pour $x = x_n \in \mathrm{I}$ et $y = \alpha \in \mathrm{I}$, on a directement :

$$|x_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\,|x_n - \alpha|\,.$$

Commentaires : *La fonction g n'étant lipschitzienne que sur I, il était important de préciser que x_n et α étaient bien dans I.*

(b) En déduire que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \ |x_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |x_0 - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Correction : Définissons (P_n) : « $|x_n-\alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_0-\alpha|$ » pour $n\in\mathbb{N}$.

Initialisation. $|x_0-\alpha| = \left(\frac{1}{2}\right)^0 |x_0-\alpha|$ donc (P_0) est vraie.

Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que (P_n) est vraie :

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x_n-\alpha| &\leqslant \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n |x_0-\alpha| \qquad \text{(d'après } (\mathrm{P}_n))\\ &\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|x_0-\alpha|,\end{aligned}$$

donc (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion. Par récurrence, (P_n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$. Enfin, puisque $x_0\in\mathrm{I}=[1\,;\mathrm{e}]$ et $\alpha\in\mathrm{I}$, alors $|x_0-\alpha|\leqslant \mathrm{e}-1\leqslant 2$, d'où :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad |x_n-\alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_0-\alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n\times 2 = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

(c) Qu'en déduit-on sur la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Correction : Comme $\frac{1}{2}\in\,]-1\,;1[$, alors $\frac{1}{2^{n-1}}\to 0$.

D'après le théorème d'encadrement ou de de domination ici, $|x_n-\alpha|\to 0$, *i.e.*

$$\lim_{n+\infty} x_n = \alpha.$$

9. Déterminer $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$ tel que x_N soit une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

Correction : On cherche N tel que $|x_\mathrm{N}-\alpha|\leqslant 10^{-6}$, ce qui est assuré dès lors que $\frac{1}{2^{\mathrm{N}-1}}\leqslant 10^{-6}$, donc on résout l'inéquation :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{n-1}}\leqslant 10^{-6} &\iff 2^{n-1}\geqslant 10^6 &&\text{(stricte décroissance de } t\longmapsto \tfrac{1}{t} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*)\\ &\iff (n-1)\ln 2\geqslant 6\ln 10 &&\text{(stricte croissance de } \ln)\\ &\iff n\ln 2\geqslant 6\ln 5+7\ln 2\\ &\iff n\geqslant 7+\frac{6\ln 5}{\ln 2} \quad \text{(car } \ln 2>0).\end{aligned}$$

Il suffit de prendre $\mathrm{N}=1+\left\lfloor 1+\frac{6\ln 10}{\ln 2}\right\rfloor$. (De tête, $\mathrm{N}=21$...).

10. Écrire une fonction `valeur_approchee(k)` en langage Python renvoyant une valeur approchée de α à 10^{-k} près (l'argument `k` est de type `int`). On pourra initialiser la suite en prenant $x_0=1$. Commenter la fonction de façon pertinente.

Correction : Comme précédemment, x_n est une valeur approchée de α à 10^{-k} près dès que $|x_n - \alpha| \leqslant 10^{-k}$, ce qui est assuré dès que $\dfrac{1}{2^{n-1}} \leqslant 10^{-k}$.

```python
from math import sqrt , log                # pour utiliser les fonctions racine et ln
def valeur_approchee(k):
        n = 0                              # initialisation du rang de la suite
        x_n = 1                            # initialisation du premier terme
                                           # de la suite
        while 1/2**(n-1) > 10**(-k):       # on cherche le premier rang n
                                           # tel que 1/2**(n-1) <= 10**(-k)
                x_n = sqrt(2-log(x_n))     # mise à jour du terme de la suite
                n += 1                     # mise à jour du rang
        return x_n                         # on renvoie la valeur approchée
                                           # (et non le rang n, attention)
```

Exercice 2 – L'objet de ce problème est d'étudier quelques propriétés des suites $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \mathrm{I}_n = \int_0^2 x^n\, \mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J}_n = \frac{1}{2^{n+1}}\mathrm{I}_n.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $f_n(x) = x^n\, \mathrm{e}^x$.

1. (a) Si $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de I_n.

Correction : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0\,;2]$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, l'intégrale $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^2 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ est bien définie.

Commentaires : *Lorsque $n \in \mathbb{N}$, $x \longmapsto x^n$ n'est pas une exponentielle mais une fonction polynomiale.*

De plus, sur une question aussi facile, la moindre des choses est de citer le théorème fondamental.

(b) Calculer I_0 et I_1 ainsi que J_0 et J_1.

Correction : On a $\mathrm{I}_0 = \displaystyle\int_0^2 x^0\, \mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x = \int_0^2 \mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x = \Big[\mathrm{e}^x\Big]_0^2 = \mathrm{e}^2 - 1$ puis $\mathrm{J}_0 = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^2 - 1)$.

Ensuite, les fonctions $x \longmapsto x$ et $v : x \longmapsto \mathrm{e}^x$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ au moins sur $[0\,;2]$, une intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_1 = \int_0^2 x\, \mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x &= \Big[x\, \mathrm{e}^x\Big]_0^2 - \int_0^2 \mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x \\
&= 2\,\mathrm{e}^2 - 0\,\mathrm{e}^0 - \Big[\mathrm{e}^x\Big]_0^2 = 2\,\mathrm{e}^2 - (\mathrm{e}^2 - 1) \\
&= \mathrm{e}^2 + 1.
\end{aligned}$$

On en déduit $\mathrm{J}_1 = \dfrac{1}{4}(\mathrm{e}^2 + 1)$.

2. *Étude de la fonction f_2.*

(a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_2(x)}{x}$. Qu'en déduit-on sur la courbe représentative de f_2 ?

Correction : Les théorèmes sur les limites de produits, nous donnent facilement $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$.

Les mêmes théorèmes, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ ce qui est assuré pour x dans un voisinage de l'infini, nous affirme que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_2(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^x = +\infty$.

La courbe $\mathscr{C}_2$ admet donc une branche parabolique de direction $(\mathrm{O}y)$.

Commentaires : *J'ai beaucoup aimé tous ceux qui m'ont parlé d'une asymptote ou tangente (au choix suivant les copies), verticale à l'infini. On la trace comment svp ?*

(b) Dresser le tableau de variations complet de f_2 sur $\mathbb{R}_+$.

Correction : Sur $\mathbb{R}_+$, f_2 est le produit de deux fonctions croissantes à valeurs positives donc croissante.

On dresse alors le tableau de variations de f_2 avec la limite précédente :

x	0		$+\infty$
$f_2'(x)$	0	$+$	
f_2	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. *Étude des variations de la suite* $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall\, x \in [0\,;2]\,,\; f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^2\, x^n$. En déduire que $0 \leqslant \mathrm{J}_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^2}{n+1}$.

Correction : Par croissance de la fonction exponentielle, pour tout $x \in [0\,;2]$, alors $\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^2$.

En multipliant par $x^n \geqslant 0$, on obtient $f_n(x) = x^n\,\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^2 x^n$.

Par croissance de l'intégrale, on peut intégrer cette inégalité entre 0 et 2 :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^2 x^n\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 \mathrm{e}^2\, x^n\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^2 = \frac{\mathrm{e}^2\, 2^{n+1}}{n+1}.$$

En divisant par 2^{n+1}, on obtient bien l'inégalité cherchée

$$\mathrm{J}_n \leqslant \frac{\mathrm{e}^2}{n+1}.$$

(b) Quelle est la limite de la suite $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Correction : Comme $\forall\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \mathrm{J}_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^2}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^2}{n+1} = 0$, d'après le théorème d'encadrement, la suite $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n = 0.$$

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathrm{I}_{n+1} = 2^{n+1}\,\mathrm{e}^2 - (n+1)\mathrm{I}_n$.

Correction : Les fonctions $x \longmapsto x^{n+1}$ et $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ sont au moins de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;2]$. Une intégration par parties s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{n+1} = \int_0^2 x^{n+1}\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= \left[x^{n+1}\,\mathrm{e}^x\right]_0^2 - \int_0^2 (n+1)x^n\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= 2^{n+1}\,\mathrm{e}^2 - 0 - (n+1)\int_0^2 x^n\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= 2^{n+1}\,\mathrm{e}^2 - (n+1)\mathrm{I}_n.\end{aligned}$$

(b) En déduire les valeurs de I_2 et de J_2.

Correction : Grâce à la relation de récurrence précédente, on a en particulier

$$\mathrm{I}_2 = 2^2\,\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{I}_1 = 4\,\mathrm{e}^2 - 2(\,\mathrm{e}^2+1) = 2\,\mathrm{e}^2 - 2.$$

Puis, $\mathrm{J}_2 = \dfrac{1}{2^3}\,\mathrm{I}_2 = \dfrac{2\,\mathrm{e}^2-2}{8} = \dfrac{\mathrm{e}^2-1}{4}$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(\dfrac{x}{2}-1\right) x^n\,\mathrm{e}^x. \end{array}$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall\ x \in [0\,;2],\ g_n(x) \leqslant 0$.

Correction : Pour tout $x \in [0;2]$, $\mathrm{e}^x > 0$ et $x^n \geqslant 0$ donc $g_n(x)$ est du signe de $\dfrac{x}{2} - 1$. Négatif donc sur $[0\,;2]$.

Conclusion, $\forall\, x \in [0\,;2],\ g_n(x) \leqslant 0$.

(b) En déduire que la suite $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_{n+1} - \mathrm{J}_n &= \frac{1}{2^{n+2}} \int_0^2 x^{n+1}\, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^2 x^n \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^2 x^n \left(\frac{x}{2} - 1\right) \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \qquad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^2 g_n(x) \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Or, $\forall\, x \in [0\,;2]$, $g_n(x) \leqslant 0$. Par positivité de l'intégrale (ou croissance) on en déduit :

$$\mathrm{J}_{n+1} - \mathrm{J}_n = \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^2 g_n(x) \, \mathrm{d}x \leqslant 0.$$

Autrement dit, la suite $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(c) Montrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{J}_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - \dfrac{n+1}{2}\mathrm{J}_n$.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après (4a), $\mathrm{I}_{n+1} = 2^{n+1}\,\mathrm{e}^2 - (n+1)\mathrm{I}_n$ donc en divisant tout par 2^{n+2}, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^{n+2}}\mathrm{I}_{n+1} &= \frac{2^{n+1}\,\mathrm{e}^2}{2^{n+2}} - (n+1)\frac{\mathrm{I}_n}{2^{n+2}} \\
\mathrm{J}_{n+1} &= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - (n+1) \times \frac{1}{2} \times \frac{\mathrm{I}_n}{2^{n+1}} \\
\mathrm{J}_{n+1} &= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{n+1}{2}\mathrm{J}_n.
\end{aligned}$$

(d) En déduire que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{J}_n \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^2}{n+3}$.

Correction : D'après (5b), la suite $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_{n+1} - \mathrm{J}_n \leqslant 0 &\iff \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{n+1}{2}\mathrm{J}_n - \mathrm{J}_n \leqslant 0 \\
&\iff \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{n+3}{2}\mathrm{J}_n \leqslant 0 \\
&\iff \frac{n+3}{2}\mathrm{J}_n \geqslant \frac{\mathrm{e}^2}{2} \\
&\iff \mathrm{J}_n \geqslant \frac{\mathrm{e}^2}{n+3}. \qquad (n+3>0)
\end{aligned}$$

(e) En déduire la limite de la suite $(n\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction : D'après les questions (3a) et (5d),

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\mathrm{e}^2}{n+3} \leqslant \mathrm{J}_n \leqslant \frac{\mathrm{e}^2}{n+1}.$$

Ainsi, en multipliant par $n \geqslant 0$, nous avons :

$$\frac{n}{n+3}\,\mathrm{e}^2 \leqslant n\mathrm{J}_n \leqslant \frac{n}{n+1}\,\mathrm{e}^2.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+3}\,\mathrm{e}^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1}\,\mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^2$, d'après le théorème d'encadrement, $(n\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} n\mathrm{J}_n = \mathrm{e}^2.$$

6. *Une somme infinie ?*

(a) En procédant par récurrence, montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{J}_n = \frac{(-1)^n\, n!\, \mathrm{e}^2}{2^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!} - e^{-2} \right).$$

Correction : Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit la propriété (H_n) : « $\mathrm{J}_n = \dfrac{(-1)^n\, n!\, \mathrm{e}^2}{2^{n+1}} \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!} - e^{-2} \right)$ ».

Initialisation. Pour $n = 0$, on a d'une part $\mathrm{J}_0 = \dfrac{\mathrm{e}^2 - 1}{2}$ et d'autre part :

$$\frac{(-1)^0\, 0!\, \mathrm{e}^2}{2^{0+1}} \left(\sum_{k=0}^{0} \frac{(-2)^k}{k!} - e^{-2} \right) = \frac{\mathrm{e}^2}{2}\left(\frac{(-2)^0}{0!} - \mathrm{e}^{-2} \right) = \frac{\mathrm{e}^2}{2}(1 - \mathrm{e}^{-2}) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2 - 1) = \mathrm{J}_0.$$

La propriété (H_0) est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que (H_n) est vraie : démontrons la propriété (H_{n+1}). D'après la formule de récurrence sur (J_n), on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_{n+1} &= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{n+1}{2}\mathrm{J}_n \\
\text{(hyp. de réc.)} \rightarrow \quad &= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{n+1}{2}\left[\frac{(-1)^n\, n!\, \mathrm{e}^2}{2^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!} - e^{-2} \right) \right] \\
&= \frac{\mathrm{e}^2}{2} + \frac{(-1)^{n+1}\,(n+1)!\, \mathrm{e}^2}{2^{n+2}} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!} - e^{-2} \right). \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(-2^{n+1})\,(n+1)!\, \mathrm{e}^2}{2^{n+2}(n+1)!} + \frac{(-1)^{n+1}\,(n+1)!\, \mathrm{e}^2}{2^{n+2}} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!} - e^{-2} \right). \\
&= \frac{(-1)^{n+1}\,(n+1)!\, \mathrm{e}^2}{2^{n+2}}\,\frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(-1)^{n+1}\,(n+1)!\, \mathrm{e}^2}{2^{n+2}} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!} - e^{-2} \right). \\
&= \frac{(-1)^{n+1}\,(n+1)!\, \mathrm{e}^2}{2^{n+2}} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-2)^k}{k!} - e^{-2} \right).
\end{aligned}$$

La propriété (H_{n+1}) a été prouvée.

Conclusion. On a montré la propriété (H_0) et que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(\mathrm{H}_n) \implies (\mathrm{H}_{n+1})$, donc par récurrence on a bien :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{J}_n = \frac{(-1)^n\, n!\, \mathrm{e}^2}{2^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!} - e^{-2} \right).$$

(b) Si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $n \geqslant 3$, montrer que $\dfrac{n!}{2^n} \geqslant \dfrac{n}{4}$. Que peut-on en déduire pour $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{2^n}$?

Correction : Introduisons la propriété (H_n) : « $\dfrac{n!}{2^n} \geqslant \dfrac{n}{4}$ ».

Initialisation. Pour $n = 3$, on a d'une part $\dfrac{3!}{2^3} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$ et d'autre part $\dfrac{n}{4} = \dfrac{3}{4}$ également, donc (H_3) est vraie.

Hérédité. Soit $n \geqslant 3$ tel que (H_n) est vraie ; démontrons (H_{n+1}) :

$$\frac{(n+1)!}{2^{n+1}} = \frac{(n+1)n!}{2 \times 2^n} = \frac{n+1}{2} \times \frac{n!}{2^n} \geqslant \frac{n+1}{2} \times \frac{n}{4} = \frac{n+1}{4} \times \frac{n}{2},$$

d'après l'hypothèse de récurrence.

Or, comme $n \geqslant 3$ alors $\dfrac{n}{2} \geqslant \dfrac{3}{2} \geqslant 1$, ainsi en multipliant cette inégalité par $\dfrac{n+1}{4} > 0$ on obtient $\dfrac{n+1}{4} \times \dfrac{n}{2} \geqslant \dfrac{n+1}{4}$.

On a bien obtenu l'inégalité au rang $n+1$, à savoir $\dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}} \geqslant \dfrac{n+1}{4}$.

Conclusion. La propriété (H_3) est vraie et $\forall\ n \geqslant 3,\ (\mathrm{H}_n) \implies (\mathrm{H}_{n+1})$. Donc par récurrence, on a démontré que $\forall\ n \geqslant 3,\ \dfrac{n!}{2^n} \geqslant \dfrac{n}{4}$.

Enfin, on sait que $\dfrac{n}{4} \to +\infty$. On conclut à l'aide du théorème de minoration :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{2^n} = +\infty.$$

(c) Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!}$?

Correction : D'après, (6a), on a :

$$|\mathrm{J}_n| = \left|\frac{(-1)^n\, n!\ \mathrm{e}^2}{2^{n+1}}\right| \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!} - e^{-2}\right|.$$

Comme $\mathrm{J}_n \geqslant 0$, cette égalité s'écrit

$$\mathrm{J}_n = \frac{n!\ \mathrm{e}^2}{2^{n+1}} \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!} - e^{-2}\right|.$$

Avec $\dfrac{n!\ \mathrm{e}^2}{2^{n+1}} \neq 0$, on obtient enfin :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!} - e^{-2}\right| = \frac{2^{n+1}}{n!\ \mathrm{e}^2} \mathrm{J}_n = 2\,\mathrm{e}^{-2} \times \frac{1}{\frac{n!}{2^n}} \times \mathrm{J}_n.$$

Comme $\dfrac{n!}{2^n} \to +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{n!}{2^n}} = 0$ de même que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{J}_n = 0$.

Le théorème sur la limite d'un produit suffit à conclure $\lim_{n\to+\infty}\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!}-e^{-2}\right|=0$ *i.e.*

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!}=\mathrm{e}^{-2}.$$

En fin d'année, on notera cette limite $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-2)^k}{k!}$. *Une telle somme infinie est appelée "série". L'année prochaine vous y verrez le développement de* exp *en série entière...*

Exercice 3 –

Définition :

— On dit qu'une matrice ligne ou colonne est **stochastique** lorsque ses coefficients sont tous positifs et que la somme de ses coefficients vaut 1.

Par exemple, la matrice colonne $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{6}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ *est stochastique car* $\frac{1}{2}\geqslant 0$, $\frac{1}{6}\geqslant 0$, $\frac{1}{3}\geqslant 0$ *et* $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=1$.

— On dit qu'une matrice carrée est stochastique lorsque chacune de ses lignes l'est.

Partie A : Des propriétés des matrices stochastiques

Dans cette partie, on considère $n\in\mathbb{N}^\star$.

1. Soit $\mathrm{X}=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A}=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec des coefficients positifs ou nuls.
   Montrer que A est stochastique si et seulement si $\mathrm{AX}=\mathrm{X}$.

Correction : Comme ses coefficients sont positifs, A est stochastique si, et seulement si la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1. Le coefficient sur la ligne i de AX est $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}$, donc $\mathrm{AX}=\mathrm{X}$ si, et seulement si A est stochastique.

Commentaires : *Si* $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, *par exemple,* $\mathrm{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ *mais* $\mathrm{A}\neq\mathrm{I}_3$ *!*

2. Soient $\mathrm{A}=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\mathrm{B}=(b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Soit $(i;j)\in[\![1\,;n]\!]^2$. Rappeler la formule donnant le coefficient sur la ligne i et la colonne j de la matrice produit AB.

Correction : Le coefficient (i,j) de AB est $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$.

(b) En déduire que si les coefficients de A et de B sont positifs alors il en est de même de ceux de AB.

Correction : Si tous les a_{ik}, b_{kj} sont positifs, alors $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \geqslant 0$ d'où la conclusion.

(c) En déduire que si A et B sont stochastiques alors la matrice AB l'est aussi.

Correction : Si A et B sont stochastiques, alors $AX = X$ et $BX = X$, donc

$$(AB)X = A(BX) = AX = X.$$

D'après (1), AB est stochastique.

Commentaires : *On pouvait aussi le faire à la main avec les sommes sur un rectangle mais c'était moins joli et pas dans l'esprit du sujet.*

Partie B : Un exemple avec les matrices de taille $(3,3)$

Dans cette partie, on étudie les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies par : $x_0 = y_0 = \dfrac{1}{2}$, $z_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{3}x_n + \dfrac{1}{2}y_n + \frac{1}{6}z_n \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{1}{3}z_n \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{3}x_n + \frac{1}{6}y_n + \dfrac{1}{2}z_n \end{cases}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

3. Montrer que $(\mathcal{S})$ s'écrit sous forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$, avec A une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on précisera.

Correction : On a $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4. Justifier que la matrice A est stochastique.

Correction : Toutes les lignes de A sont positives et de somme 1. Ainsi, A est stochastique.

5. (a) On pose $Q=\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$. Montrer que Q est inversible et que $Q^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

Correction : On vérifie que $Q\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&-1\end{pmatrix}Q=I_3$. Cela prouve que Q est inversible et que $Q^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

Commentaires : *Quand on vous donne l'inverse, on ne le cherche pas ! On vérifie simplement que ça l'est bien et, petit raffinement, on fait bien attention à ne pas écrire* Q^{-1} *avant d'avoir prouvé que* Q *était inversible et on n'écrit pas, par exemple,* $QQ^{-1}=\ldots$.

(b) En déduire que $A=QDQ^{-1}$ avec $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$.

Correction : Puisqu'on nous donne tout, il suffit de calculer QDQ^{-1} et de trouver ... A.

6. Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $X_n=QD^nQ^{-1}X_0$.

Correction : Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, on montre que $X_n=A^nX_0=QD^nQ^{-1}X_0$.

7. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

(a) Exprimer X_n en fonction de n.

Correction : La matrice D étant diagonale, on obtient directement $D^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&\left(\frac{1}{6}\right)^n\end{pmatrix}$, puis par produits, en remarquant que $X_0=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$, $X_n=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n\end{pmatrix}$.

(b) Montrer que le vecteur X_n est stochastique.

Correction : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n \leqslant \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{1}{3}$, donc x_n, y_n et z_n sont positifs et on a $x_n + y_n + z_n = 1$.

On en déduit que X_n est stochastique.

Commentaires : *Pour invoquer le produit de matrices stochastiques sachant que A et X_0 l'étaient, il fallait le démontrer par récurrence. C'est plus long.*

8. Prouver que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers des limites que l'on notera ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z.

Correction : On a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \dfrac{1}{3}$ par somme, car $\left|\dfrac{1}{6}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$.

9. Prouver que $\mathrm{L} = \begin{pmatrix} \ell_x \\ \ell_y \\ \ell_z \end{pmatrix}$ est stochastique et calculer AL.

Correction : Ainsi, $\mathrm{L} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$ est clairement stochastique, et on trouve $\mathrm{AL} = \mathrm{L}$.

Commentaires : *Bien sûr, on pouvait aussi calculer le produit AL mais c'était renier la question 1.*