Nom : .... **Prénom :** ....

Suites, Limites et Continuité (début)

Question de cours : Exprimer la limite (finie ou infinie d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition à l'aide de voisinage, d'inégalités, d'intervalles et de majoration de normes. De même pour la limite par valeurs inférieures.

Exercice 1 : Déterminer $\lim_{x \to 0} x \frac{\tan x}{\cos^2 x - 1}$.

Exercice 2 : Sur quel sous ensemble D de $\mathbb{R}$, la fonction de la variable réelle f donnée par

$$f(x) = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

est-elle définie ? Calculer les limites de f aux bornes de D.

Exercice 3 : Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, alors $(u+v)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Nom : .... **Prénom :** ....

Suites, Limites et Continuité (début)

Question de cours : Théorème des valeurs intermédiaires. *L'énoncé devra être parfaitement su en entier !*

Exercice 1 : Montrer que si une fonction f définie sur $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$ est continue en x_0 alors la fonction $|f|$ est, elle aussi, continue en x_0.

Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 2 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue, telle que pour chaque $x \in \mathrm{I}$, $f(x)^2 = 1$.

Montrer que $f \equiv 1$ ou $f \equiv -1$.

Exercice 3 : Montrer que $u_n = n^3$ diverge vers l'infini.

Nom : .... **Prénom :** ....

Suites, Limites et Continuité (début)

Question de cours : Théorème des suites adjacentes.

Exercice 1 : Déterminer $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

Exercice 2 : Soient $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux applications continues telles que $(f(0)-g(0))(f(1)-g(1)) \leqslant 0$.

Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$, $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 3 :

1. Trouver une suite non bornée qui ne tende ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$.
2. Trouver une suite positive qui converge vers 0, mais non décroissante, même pour n très grand.
3. Trouver une suite divergente telle que $\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, (u_{np})_n$ converge.

Nom : .... **Prénom :** ....

Suites, Limites et Continuité (début)

Question de cours : Montrer que f est prolongeable par continuité en $a \in \overline{\mathrm{D}} \setminus \mathrm{D}$ si, et seulement si f admet une limite finie en a.

Exercice 1 : Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2}-1)$.

Exercice 2 :

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$, et pour tout couple de nombres réels (x, y) appartenant à $]-\infty, -a]$ ou à $[a, +\infty[$, on a :
$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \leqslant \frac{1}{a^2}|x-y|.$$
2. En déduire que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que :
$$|x - x_0| < \alpha \implies \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \epsilon.$$
3. En déduire que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

Exercice 3 : Montrer qu'une suite d'entiers qui converge est constante à partir d'un certain rang.

Nom : .... **Prénom :** ....

Suites, Limites et Continuité (début)

Question de cours : Théorème d'encadrement, de majoration ou de minoration pour les suites qui devront être énoncés rigoureusement.

Exercice 1 : Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$

Exercice 2 :

1. Pour tout n entier naturel et tout couple de réels (x, y), établir la formule :
$$x^n - y^n = (x-y).\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$
2. Déduire de la question précédente que pour tout entier n tout réel strictement positif a et tout couple de réels (x, y) tel que $|x| \leqslant a$ et $|y| \leqslant a$,
$$|x^n - y^n| \leqslant n a^{n-1} |x-y|.$$
3. Déduire de ce qui précède que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que :
$$|x - x_0| < \alpha \ \Rightarrow \ |x^n - x_0^n| < \epsilon.$$
Conclure quant à la continuité de $x \longmapsto x^n$ en $x_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 : Nature de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Suites, Limites et Continuité (début)

Question de cours : Théorème de Bolzano via la borne sup et/ou l'algorithme de dichotomie.

Exercice 1 : Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x-1}{x^n-1}$

Exercice 2 : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x}{2x + |x|}$.

Déterminer le domaine de définition de f.

f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 3 : Nature de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Suites, Limites et Continuité (début)

Question de cours : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell > 0$ alors $\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \mathrm{M} > 0$.

Exercice 1 : Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 + 2\,|x|}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3\,x + 2}$

Exercice 2 : Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera.
2. Expliciter l'application réciproque de f.

Exercice 3 : Nature de la suite de terme général $u_n = \dfrac{\sin 1 + \sin 2 + \cdots + \sin n}{n}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Suites, Limites et Continuité (début)

Question de cours : Montrer que $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est continue à droite sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1 : Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

Exercice 2 : Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$.

Montrer que la fonction $g(t) = f\left(t + \dfrac{b-a}{2}\right) - f(t)$ s'annule en au moins un point de $\left[a\,;\dfrac{a+b}{2}\right]$.

Application : une personne parcourt 4 km en 1 heure.

Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

Exercice 3 : Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

En déduire la limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Suites, Limites et Continuité (début)

Question de cours : Si $\dfrac{1}{\ell}$ est défini sur $\overline{\mathbb{R}} \cup \{0^+, 0^-\}$, alors $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie et $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\ell}$.

Exercice 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 dans son intérieur. On suppose que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = u > 0$.

Démontrer qu'il existe $t > 0$ tel que si $0 < |x - x_0| < t$ alors $|f(x)| \geqslant \dfrac{u}{2}$.

Exercice 2 : Soit a, b deux réels tels que $a < b$.

On considère une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$.

Montrer que si $f([a, b])$ est fini, alors f est constante.

Exercice 3 : $u_0, v_0 \in \mathbb{R}_+^*$, et $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \dfrac{2u_nv_n}{u_n + v_n}$.

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite qu'on déterminera.

Indication : commencer par montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant v_n$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Suites, Limites et Continuité (début)

Question de cours : Comportement de la limite avec les inégalités strictes et larges pour les fonctions.

Exercice 1 : Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+ \; g(x) > 0 \text{ et } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \mathrm{L} \neq 0.$$

Montrer que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Exercice 2 : Étudier en tout point la continuité de $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} \end{array}$.

Exercice 3 : Soient $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $u_n = \dfrac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \mathrm{S}_n - 2\sqrt{n}$.

1. Montrer : $\mathrm{S}_n \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$;
2. Montrer : $2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant \mathrm{S}_n$;
3. En déduire que (u_n) et (v_n) convergent.

Nom : .... **Prénom :** ....

Suites, Limites et Continuité (début)

Question de cours : Théorème de la limite monotone pour les fonctions.

Exercice 1 : Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+ \; g(x) > 0 \text{ et } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \mathrm{L} \neq 0.$$

Montrer que si $\mathrm{L} > 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$.

Exercice 2 : Soit f une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, admettant une limite réelle quand x tend vers $+\infty$.

Montrer que f est constante.

Exercice 3 : Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{e^k}$.

En introduisant la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{-kx}$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Suites, Limites et Continuité (début)

Question de cours : Pour $q \in \mathbb{R}$, $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si, et seulement si $q \in \left]-1\,;1\right[$.

Exercice 1 :

1. Montrer que pour tout $0 < \epsilon < 1$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|x-1| < \frac{\epsilon}{4} \implies |x^2+x-2| < \epsilon.$$

2. En déduire :

$$\lim_{x\to 1} x^2+x-1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1}(x^2+x-2)\cos x.$$

Exercice 2 :

1. Rappeler que pour tout nombre réels $\epsilon > 0$ il existe un entier n tel que :

$$\frac{1}{2n\pi} < \epsilon \qquad \textit{et} \qquad \frac{1}{(2n+1)\pi} < \epsilon.$$

2. Montrer que pour tout nombre réel l, et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in]-\epsilon, \epsilon[$ tel que :

$$\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right) - l\right| > \frac{1}{2}.$$

3. En déduire que la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0.
4. Montrer que la fonction définie par $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Soit (u_n) une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \sup\limits_{p \geqslant n} u_p$ et $w_n = \inf\limits_{p \geqslant n} u_p$.

Étudier les monotonies des suites (v_n) et (w_n). Que peut-on en déduire ?