Nom : .... **Prénom :** ....

Continuité, Dérivabilité - Systèmes linéaires

Question de cours : Théorème de Rolle.

Exercice 1 : Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \cos x \end{array}$.

Exercice 2 : Discuter suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x + y - z & = & 1 \\ x - 2y + 2z & = & m \\ x + y - z & = & 1 \end{array} \right.$$

Exercice 3 : Sur quel sous ensemble D de $\mathbb{R}$, la fonction de la variable réelle f donnée par

$$f(x) = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

est-elle définie ? Calculer les limites de f aux bornes de D.

Nom : ....   **Prénom :** ....

Continuité, Dérivabilité - Systèmes linéaires

Question de cours : Lien entre monotonie et signe de la dérivée sur un intervalle. Pour les volontaires, cas de la stricte monotonie.

Exercice 1 : Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de $f : x \longmapsto x^2(1+x)^n$.

Exercice 2 : Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + my & = & -3 \\ mx + 4y & = & 6 \end{array}\right.$$

Quelle interprétation géométrique du résultat faites-vous ?

Exercice 3 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue, telle que pour chaque $x \in \mathrm{I}$, $f(x)^2 = 1$.

Montrer que $f \equiv 1$ ou $f \equiv -1$.

Nom : .... **Prénom :** ....

Continuité, Dérivabilité - Systèmes linéaires

Question de cours : Inégalités des accroissements finis dans le cas complexe.

Exercice 1 : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}, \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant n!$.

Exercice 2 : Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases}$$

Exercice 3 : Soient $f, g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications continues telles que $(f(0)-g(0))(f(1)-g(1)) \leqslant 0$.

Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1], f(x_0) = g(x_0)$.

Nom : ....

Prénom : ....

Continuité, Dérivabilité - Systèmes linéaires

Question de cours : Théorème des accroissements finis.

Exercice 1 : Pour $n \geqslant 1$ et $x \neq 0$, on pose $f_n(x) = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$.

Montrer que $\forall\, x \neq 0, \quad f_n^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 2 : Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right.$$

Exercice 3 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue, non constante, telle que $f(a) = f(b)$.

On note $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $\mathrm{M} = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Montrer que tout $\alpha \in]m, \mathrm{M}[$ admet au moins deux antécédents par f dans $[a,b]$.

Nom : ....   **Prénom :** ....

Continuité, Dérivabilité - Systèmes linéaires

Question de cours : Dérivabilité de la réciproque dans le cas d'une fonction bijective.

Exercice 1 : Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de $f : x \longmapsto xe^{2x}$.

Exercice 2 : Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & b \\ x & + & 2y & + & z & = & c \end{array}\right.$$

Exercice 3 : Sur quel sous ensemble D de $\mathbb{R}$, la fonction de la variable réelle f donnée par

$$f(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$$

est-elle définie ? Calculer les limites de f aux bornes de D.

Nom : .... **Prénom :** ....

Continuité, Dérivabilité - Systèmes linéaires

Question de cours : Dérivabilité du produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$. Formule de Leibniz à énoncer correctement et en connaître les idées de la démonstration.

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{x\sqrt{3}} \sin(x)$.

Montrer que $f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{6}\right)$.

Exercice 2 : Trouver les solutions de

$$\begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ 3y + z + 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

Exercice 3 : Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T.

Montrer que f est bornée et que f atteint ses bornes.

Nom : ....   **Prénom :** ....

Continuité, Dérivabilité - Systèmes linéaires

Question de cours : Une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a.

Exercice 1 : Soit $f : x \longmapsto x + \sin^2(x)$.

Étudier la fonction f. Préciser les points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 2 : Discuter s'il y a lieu, et résoudre le système d'inconnues (x, y, z) où a, b sont des paramètres réels.

$$\begin{cases} 3x + y - z = -1 \\ 5x + 2y - 2z = a \\ 4x + y - z = b \end{cases}$$

Exercice 3 : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x}{2x + |x|}$.

Déterminer le domaine de définition de f.

f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Nom : .... **Prénom :** ....

Continuité, Dérivabilité - Systèmes linéaires

Question de cours : Théorème des valeurs intermédiaires. *L'énoncé devra être parfaitement su en entier !*

Exercice 1 : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$.

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.

Exercice 2 : Discuter s'il y a lieu, et résoudre le système d'inconnues (x, y) où a, b sont des paramètres réels.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ ax + by = 0 \\ a^2x + b^2y = 1 \\ a^3x + b^3y = 0 \end{cases}$$

Exercice 3 :

1. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue.

   Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$.
2. Soient $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ continues telles que $f \circ g = g \circ f$.

   Montrer qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = g(x)$ (on pourra s'intéresser aux points fixes de f).

Nom : .... **Prénom :** ....

Continuité, Dérivabilité - Systèmes linéaires

Question de cours : Théorème de Bolzano via la borne sup et/ou l'algorithme de dichotomie.

Exercice 1 : Soient f, g continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que $\forall\, x \in]a, b[$, $g'(x) \neq 0$.

1. Montrer que $g(b) - g(a) \neq 0$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Exercice 2 : Résoudre $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x + 2y + z - 2t = 0 \\ 3x + 2z - t = 4 \end{cases}$

Exercice 3 : Soit a, b deux réels tels que $a < b$.

On considère une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$.

Montrer que si $f([a, b])$ est fini, alors f est constante.