Fichiers systemes-Lineaires a, b et c

EXERCICES FACILES :

Exercice 1 : Discuter suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+y-z & = & 1 \\ x-2y+2z & = & m \\ x+y-z & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 2 : Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+my & = & -3 \\ mx+4y & = & 6 \end{array}\right.$$

Quelle interprétation géométrique du résultat faites-vous ?

Exercice 3 : Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ x & + & 4y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Correction : Remarquons que comme le système est homogène (c'est-à-dire les coefficients du second membre sont nuls) alors $(0,0,0)$ est une solution du système. Voyons s'il y en a d'autres. Nous faisons semblant de ne pas voir que la seconde ligne implique $x=y$ et que le système est en fait très simple à résoudre. Nous allons appliquer le pivot de Gauss en faisant les opérations suivantes sur les lignes $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ x & + & 4y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & 3y & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

On fait maintenant $L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_2$ pour obtenir :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & & & 7z & = & 0 \end{array}\right.$$

En partant de la dernière ligne on trouve $z=0$, puis en remontant $y=0$, puis $x=0$. Conclusion l'unique solution de ce système est $(0,0,0)$.

Exercice 4 : Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right.$$

Correction : On applique le pivot de Gauss $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & - & 2y & - & 3z & = & -4 \\ & - & y & - & z & = & -2 \end{array}\right.$$

Puis $L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2$ pour obtenir un système équivalent qui est triangulaire donc facile à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ & - & 2y & - & 3z & = & -4 \\ & & & & z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3 \\ y & = & 2 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

On n'oublie pas de vérifier que c'est une solution du système initial.

Exercice 5 : Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & b \\ x & + & 2y & + & z & = & c \end{array}\right.$$

Correction : On fait les opérations $L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1$ pour obtenir :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & b \\ x & + & 2y & + & z & = & c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ & & 5y & - & 7z & = & 3b+a \\ & & 7y & + & z & = & 3c-a \end{array}\right.$$

Puis on fait $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$, ce qui donne un système triangulaire :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ & & 5y & - & 7z & = & 3b+a \\ & & & & 54z & = & 5(3c-a)-7(3b+a) \end{array}\right.$$

En partant de la fin on en déduit : $z = \frac{1}{54}(-12a - 21b + 15c)$ puis en remontant cela donne

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{18}(8a+5b-c) \\ y & = & \frac{1}{18}(-2a+b+7c) \\ z & = & \frac{1}{18}(-4a-7b+5c) \end{array}\right.$$

Exercice 6 : Trouver les solutions de

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+2z=0 \\ 3y+z+3t=0 \\ x+y+z+t=0 \\ 2x-y+z-t=0 \end{array}\right.$$

Correction : On commence par simplifier le système :

- on place la ligne L_3 en première position pour le pivot de Gauss;
- on réordonne les variables dans l'ordre : y, t, x, z pour profiter des lignes déjà simples.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} y & + & t & + & x & + & z & = & 0 \\ 3y & + & 3t & & & + & z & = & 0 \\ -y & - & t & + & 2x & + & z & = & 0 \\ & & & & 3x & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

On commence le pivot de Gauss avec les opération $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ pour obtenir :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} y & + & t & + & x & + & z & = & 0 \\ & & & - & 3x & - & 2z & = & 0 \\ & & & & 3x & + & 2z & = & 0 \\ & & & & 3x & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

Les 3 dernières lignes sont identiques, on se ramène donc à un système avec 2 équations et 4 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} y & + & t & + & x & + & z & = & 0 \\ & & & & 3x & + & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

Nous choisissons x et y comme paramètres, alors $z = -\dfrac{3}{2}x$ et $t = -x - y - z = \dfrac{1}{2}x - y$. Les solutions du système sont donc les

$$\left\{(x, y, z = -\frac{3}{2}x, t = \frac{1}{2}x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}$$

Exercice 7 : Discuter s'il y a lieu, et résoudre le système d'inconnues (x, y, z) où a, b sont des paramètres réels.

$$\begin{cases} 3x + y - z = -1 \\ 5x + 2y - 2z = a \\ 4x + y - z = b \end{cases}$$

Exercice 8 : Discuter s'il y a lieu, et résoudre le système d'inconnues (x, y) où a, b sont des paramètres réels.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ ax + by = 0 \\ a^2x + b^2y = 1 \\ a^3x + b^3y = 0 \end{cases}$$

Exercice 9 : Résoudre $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x + 2y + z - 2t = 0 \\ 3x + 2z - t = 4 \end{cases}$

EXERCICE DE DIFFICULTÉ MOYENNE :

Exercice 1 : Un cycliste va d'une ville A à une ville B. Le parcours compte x kilomètres de montée, y kilomètres de plat et z kilomètres de descente. Il roule à 15 km/h en montée, 20km/h sur le plat et 30km/h en descente. Il met deux heures à effectuer le trajet aller et trois heures pour le retour.

1. Mettre le problème en équations.
2. Un autre cycliste qui roule respectivement à 20, et 30 et 40 km/h sur chaque type de route, effectue l'aller-retour en un temps total de trois heures quarante minutes. Déduire une équation supplémentaire.
3. Déterminer les valeurs de x, y et z.
4. Sachant que les montées et descentes ont toutes une même pente de 5%, déterminer la différence d'altitude des deux villes, ainsi que celle qui est située le plus haut.

Correction : $\begin{cases} 4x + 3y + 2z = 120 \\ 2x + 3y + 4z = 180 \\ 9x + 8y + 9z = 440 \end{cases}$ Donc $\boxed{x = 5,\ y = 10 \text{ et } z = 35.}$

A est située 1500 m au-dessus de B.

Exercice 2 : Déterminer selon les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le rang du système suivant :

$$\begin{cases} (2 - m)x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + (5 - m)y + 4z = 0 \\ 2x + 4y + (5 - m)z = 0 \end{cases}$$

Correction :

- $m = 1$: rang 1
- $m = 10$: rang 2
- Sinon, rang 3

Exercice 3 : Résoudre et discuter le système suivant selon le paramètre a :

$$\begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ x - y + z = 0 \\ 4x - 2y + az = a \end{cases}$$

Correction :

- Si $a = 1$, $\mathcal{S} = \emptyset$
- Sinon, $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{3a-4}{2(a-1)}, \frac{5a-8}{2(a-1)}, \frac{a-2}{a-1} \right) \right\}$

Exercice 4 : Résoudre et discuter le système suivant d'inconnue (x, y, z) et de paramètre a :

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

Correction :

- Si $a = 2$, $\mathcal{S} = \emptyset$
- Si $a = 1$, $\mathcal{S} = \{(1 - y - z, y, z), y, z \in \mathbb{R})\}$
- Sinon, $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2} \right) \right\}$

Exercice 5 : Résoudre et discuter le système suivant d'inconnue (x, y, z) et de paramètre a :

$$\begin{cases} x - y + 2z + t = 0 \\ -2x + 3y + z - 4t = 1 \\ -3x + 5y + 4z - 7t = a \\ -x + 2y + 3z - 3t = b \end{cases}$$

Correction :

- Si $(a, b) \neq (2, 1)$, $\mathcal{S} = \emptyset$.
- Si $(a, b) = (2, 1)$, $\mathcal{S} = \{(1 - 3z + 3t, 1 - 5z + 2t, z, t), z, t \in \mathbb{R})\}$.

Exercice 6 : Résoudre et discuter le système suivant d'inconnue (x, y, z) et de paramètre a :

$$\begin{cases} (a+2)x + 2y + 3z = 0 \\ 6x + (a+1)y + 6z = 0 \\ -4x - 2y + (a-5)z = 0 \end{cases}$$

Correction :

- Si $a = -1$, $\mathcal{S} = \{(-z, -z, z), z \in \mathbb{R})\}$.
- Si $a = 1$, $\mathcal{S} = \{(-z, 0, z), z \in \mathbb{R})\}$.
- Si $a = 2$, $\mathcal{S} = \{(-2y, y, 0), z \in \mathbb{R})\}$.
- Sinon $\mathcal{S} = \{(0, 0, 0))\}$.

Exercice 7 : Résoudre et discuter le système suivant d'inconnue (x, y, z) et de paramètre a :

$$\begin{cases} (a-1)x - 2y + 2z = 0 \\ 3x + (a+7)y - 9z = 0 \\ -x + 2y + (a-4)z = 0 \end{cases}$$

Correction :

- Si $a = -3$, $\mathcal{S} = \{(-z, 3z, z), z \in \mathbb{R})\}$.
- Si $a = -1$, $\mathcal{S} = \{(-z, 2z, z), z \in \mathbb{R})\}$.
- Si $a = 2$, $\mathcal{S} = \{(0, z, z), z \in \mathbb{R})\}$.
- Sinon $\mathcal{S} = \{(0, 0, 0))\}$.

Exercice 8 : Discuter s'il y a lieu, et résoudre le système d'inconnues (x, y, z) où m est un paramètre réel.

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = 1 \\ x + y + z = m \end{cases}$$

Exercice 9 : Résoudre

$$\mathrm{S}_1 : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & \operatorname{ch}(ay) & + & \operatorname{ch}(2az) & = & \operatorname{ch}(3a) \\ \operatorname{ch}(ax) & + & \operatorname{ch}(2ay) & + & \operatorname{ch}(3az) & = & \operatorname{ch}(4a) \\ \operatorname{ch}(2ax) & + & \operatorname{ch}(3ay) & + & \operatorname{ch}(4az) & = & \operatorname{ch}(5a) \end{array} \right.$$

Correction : S_1 : si $a \neq 0$, le système est équivalent à $y = -1 - 2\operatorname{ch} a\ x$ et $z = x + 2\operatorname{ch} a$

si $a = 0$, il est équivalent à $x + y + z = 1$.

Exercice 10 : Résoudre, selon les valeurs de a, le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} ax & + & y & = & 2 \\ (a^2+1)x & + & 2ay & = & 1 \end{array} \right.$$

Correction : Avant tout on regarde s'il existe une solution unique, c'est le cas si et seulement si le déterminant est non nul.

Pour le premier système le déterminant est $\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2+1 & 2a \end{vmatrix} = a^2 - 1$ donc il y a une unique solution si et seulement si $a \neq \pm 1$.

Bien sûr toutes les méthodes conduisent au même résultat !

Par exemple par substitution, en écrivant la première ligne $y = 2 - ax$, la deuxième ligne devient $(a^2+1)x + 2a(2 - ax) = 1$. On en déduit que si $a \neq \pm 1$ alors $x = \dfrac{4a-1}{a^2-1}$ puis $y = \dfrac{-2a^2 + a - 2}{a^2 - 1}$.

Traitons maintenant les cas particuliers.

Si $a = 1$ alors le système devient :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 2 \\ 2x & + & 2y & = & 1 \end{array} \right.$$

Mais on ne peut avoir en même temps $x + y = 2$ et $x + y = \dfrac{1}{2}$.

Donc il n'y a pas de solution.

Si $a=-1$ alors le système devient :

$$\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$$

et il n'y a pas de solution.

Exercice II : Résoudre, selon les valeurs de a, le système suivant :

$$\begin{cases} (a+1)x + (a-1)y = 1 \\ (a-1)x + (a+1)y = 1 \end{cases}$$

Correction : Ici le déterminant est $\begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ a-1 & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^2-(a-1)^2 = 4a$.

Si $a \neq 0$ alors on trouve la solution unique (x,y).

Par exemple avec la formule de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix}}{4a} = \frac{1}{2a} \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ a-1 & 1 \end{vmatrix}}{4a} = \frac{1}{2a}.$$

Si $a=0$ il n'y a pas de solution.

EXERCICES PLUS ARDUS :

Exercice I : Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ, a, b, c, d le système :

$$(S)\begin{cases} (1+\lambda)x+y+z+t = a \\ x+(1+\lambda)y+z+t = b \\ x+y+(1+\lambda)z+t = c \\ x+y+z+(1+\lambda)t = d \end{cases}$$

Correction :

1. On commence par simplifier le système en effectuant les opérations suivantes sur les lignes : $L_1 \leftarrow L_1 - L_4$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_4$:

$$(S) \iff \begin{cases} \lambda x - \lambda t = a-d \\ \lambda y - \lambda t = b-d \\ \lambda z - \lambda t = c-d \\ x + y + z + (1+\lambda)t = d \end{cases}$$

2. Traitons le cas particulier $\lambda = 0$. Si $\lambda=0$ alors le système n'a des solutions que si $a=b=c=d$. Les solutions sont alors les (x,y,z,t) qui vérifie $x+y+z+t=d$. (C'est un espace de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$.)

3. Si $\lambda \neq 0$ alors on peut faire l'opération suivante sur la dernière ligne : $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{\lambda}L_1 - \frac{1}{\lambda}L_2 - \frac{1}{\lambda}L_3$ pour obtenir :

$$(S) \iff \begin{cases} \lambda x - \lambda t = a-d \\ \lambda y - \lambda t = b-d \\ \lambda z - \lambda t = c-d \\ (\lambda+4)t = d - \frac{1}{\lambda}(a+b+c-3d) \end{cases}$$

4 Cas particulier $\lambda = -4$. La dernière ligne devient $0 = a+b+c+d$. Donc si $a+b+c+d \neq 0$ alors il n'y a pas de solutions.

Si $\lambda = -4$ et $a+b+c+d = 0$ alors existe une infinité de solutions :

$$\left\{\left(t - \frac{a-d}{4}, t - \frac{b-d}{4}, t - \frac{c-d}{4}, t\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\}.$$

5 Cas général : $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq -4$. On calcule d'abord $t = \dfrac{1}{\lambda+4}\left(d - \dfrac{1}{\lambda}(a+b+c-3d)\right)$ et en remplaçant par la valeur de t obtenue on en déduit les valeurs pour $x = t + \dfrac{1}{\lambda}(a-d)$, $y = t + \dfrac{1}{\lambda}(b-d)$, $z = t + \dfrac{1}{\lambda}(c-d)$. Il existe donc une solution unique :

$$\left(\frac{(\lambda+3)a-b-c-d}{\lambda(\lambda+4)}, \frac{(\lambda+3)b-a-c-d}{\lambda(\lambda+4)}, \frac{(\lambda+3)c-a-b-d}{\lambda(\lambda+4)}, \frac{(\lambda+3)d-a-b-c}{\lambda(\lambda+4)}\right).$$

Exercice 2 : Résoudre

$$\mathrm{S}_2 : \left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & \dots & + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & \dots & + & nx_n & = & 0 \\ x_1 & + & 2^2x_2 & + & \dots & + & n^2x_n & = & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ x_1 & + & 2^{n-1}x_2 & + & \dots & + & n^{n-1}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

Correction : On peut soustraire à chaque ligne la ligne précédente, puis 2 fois la précédente, etc...On obtient ainsi un système triangulaire cramérien et après bien des calculs la solution $x_k = (-1)^{k+1}\mathrm{C}_n^k$.

Voici une solution plus astucieuse.

Soit $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = x_1\mathrm{X} + x_2\mathrm{X}^2 + \cdots + x_n\mathrm{X}^n$ et T l'opérateur $\mathrm{Q}(x) \mapsto \mathrm{XQ}'(\mathrm{X})$.

Le système peut s'écrire $\mathrm{P}(1) = 1$, $(\mathrm{TP})(1) = 0$, $(\mathrm{T}^2\mathrm{P})(1) = 0, \dots,$ $(\mathrm{T}^{n-1}\mathrm{P})(1) = 0$.

On en déduit que $\mathrm{P}'(1) = \mathrm{P}''(1) = \dots = \mathrm{P}^{(n-1)}(1) = 0$, donc P est de la forme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = 1 + \lambda(1-\mathrm{X})^n$, et $\lambda = -1$ car le terme constant de P est nul.
Donc $x_k = (-1)^{k+1}\mathrm{C}_n^k$.

Exercice 3 : Trouver trois réels α, β, γ tels que pour tout polynôme de degré $\leqslant 3$ on ait :

$$\int_2^4 \mathrm{P}(x)\, dx = \alpha\mathrm{P}(2) + \beta\mathrm{P}(3) + \gamma\mathrm{P}(4).$$

Correction : Notons $\mathrm{P}(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polynôme de degré $\leqslant 3$.

1 Tout d'abord calculons l'intégrale :

$$\int_2^4 \mathrm{P}(x)\, dx = \left[a\frac{x^4}{4} + b\frac{x^3}{3} + c\frac{x^2}{2} + dx\right]_2^4 = 60a + \frac{56}{3}b + 6c + 2d.$$

2 D'autre part

$$\alpha\mathrm{P}(2) + \beta\mathrm{P}(3) + \gamma\mathrm{P}(4) = \alpha(8a+4b+2c+d) + \beta(27a+9b+3c+d) + \gamma(64a+16b+4c+d).$$

Donc

$$\alpha\mathrm{P}(2) + \beta\mathrm{P}(3) + \gamma\mathrm{P}(4) = (8\alpha+27\beta+64\gamma)a + (4\alpha+9\beta+16\gamma)b + (2\alpha+3\beta+4\gamma)c + (\alpha+\beta+\gamma)d.$$

3 Pour avoir l'égalité $\int_2^4 \mathrm{P}(x)\,dx = \alpha\mathrm{P}(2) + \beta\mathrm{P}(3) + \gamma\mathrm{P}(4)$ quelque soit les coefficients a, b, c, d il faut et il suffit que

$$(8\alpha + 27\beta + 64\gamma)a + (4\alpha + 9\beta + 16\gamma)b + (2\alpha + 3\beta + 4\gamma)c + (\alpha + \beta + \gamma)d = 60a + \frac{56}{3}b + 6c + 2d$$

ce qui équivaut à

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 2 \\ 2\alpha & + & 3\beta & + & 4\gamma & = & 6 \\ 4\alpha & + & 9\beta & + & 16\gamma & = & \dfrac{56}{3} \\ 8\alpha & + & 27\beta & + & 64\gamma & = & 60 \end{array}\right.$$

De façon surprenante ce système à 3 inconnues et 4 équations a une solution unique :

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{4}{3}, \quad \gamma = \frac{1}{3}.$$