

XIX

Suites récurrentes

Les exercices que l'on vous a proposés jusqu'ici ont pu vous donner l'impression que pour définir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence, il suffisait de se donner une fonction f quelconque, un u_0 dans le domaine de définition de f , et de décréter simplement que « $u_{n+1} = f(u_n)$ ». Quelle illusion !

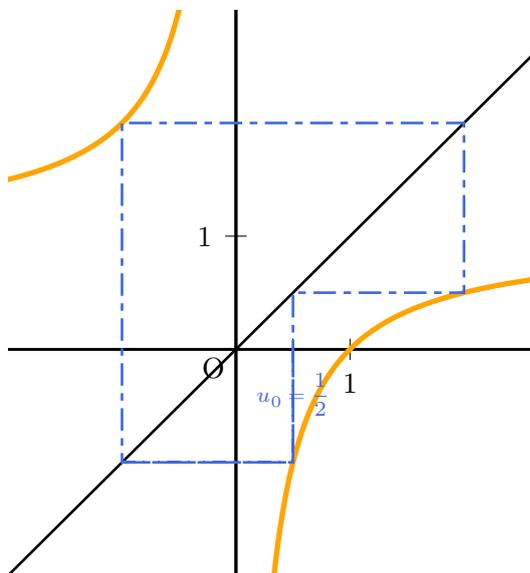


Figure XIX.1 - $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{u_n}$ avec $u_0 = \frac{1}{2}$.

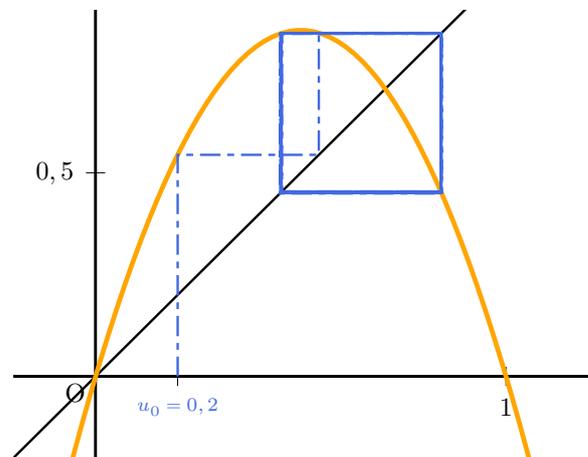


Figure XIX.2 - $u_{n+1} = 3,4u_n(1-u_n)$ avec $u_0 = 0,2$.

Figure XIX.3 – Exemples de suites chaotiques. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède un cycle.

Notons par exemple f la fonction $x \mapsto 2 + \sqrt{2-x}$ définie sur $] -\infty ; 2]$ et posons :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Comme $u_0 \in] -\infty ; 2]$, on peut calculer $u_1 = f(u_0) = 3$, mais ensuite ????. Aucun sens ! Quelle valeur pour u_2 ?

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est ici pas définie.

Pire, et seulement pour la culture car très éloigné de notre niveau, le théorème de Sharkovsky^[1] sur les fonctions chaotiques a fait l'objet de recherche active lors des dernières décennies. On ne parle plus des

[1]. Oleksandr Mykolayovych Sharkovsky est un éminent mathématicien ukrainien célèbre pour le développement du théorème de Sharkovsky sur les périodicités des systèmes dynamiques discrets en 1964.

siècles derniers ici et une simple suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in [0; 1] \\ u_{n+1} = 4\mu(1 - u_n)u_n, \mu \in [0; 1] \end{cases}$$

donne bien des soucis.

Mais comment différencier alors les exemples qui marchent de ceux qui ne marchent pas? C'est le propos de ce chapitre.

CONTENU

I	Suites récurrentes	2
I.1	Représentation graphique d'une suite récurrente	3
I.2	Stabilité et définition	3
I.3	Variations	4
I.4	Convergence et point fixe	8
I.5	Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1	12
II	Suites récurrentes linéaires	14
II.1	Cas complexe : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$	15
II.2	Cas réel : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$	17

I/ Suites récurrentes

Dans tout cette section, f est une fonction continue sur un intervalle I à valeurs réelles.

On étudie la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

Exercice 1 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.
2. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Correction :

1. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ et par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x + 1}$ sur \mathbb{R}_+ .
2. D'après la question précédente, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 2. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge donc vers une limite $\ell \leq 2$.

Le théorème de Sharkovsky est un théorème portant sur l'itération des fonctions continues.

Il donne des contraintes sur la présence de points périodiques lorsqu'on itère la fonction f , c'est-à-dire de points u_0 tels que la suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$ correspondante soit périodique.

Ce théorème fait partie des premiers exemples remarquables de la *théorie des systèmes dynamiques*, introduisant la notion de *chaos*. Sa popularité est telle qu'il se retient souvent sous la forme d'un « slogan », correspondant à un énoncé simplifié :

3-cycle implique chaos

Il faut comprendre par là que toute fonction continue présentant un cycle de période 3 admet un cycle de période n pour tout entier n .

I.1 Représentation graphique d'une suite récurrente

Méthode 1 (Représentation d'une suite) :

Pour visualiser une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ dans un repère :

- On trace la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f associée et de la première bissectrice $(\Delta) : x \mapsto x$.
- On place le point $(u_0; 0)$.
- On trouve $u_1 = f(u_0)$ à l'aide de \mathcal{C}_f .
- On reporte le $(u_1; 0)$ à l'aide la bissectrice.
- On itère le procédé ...

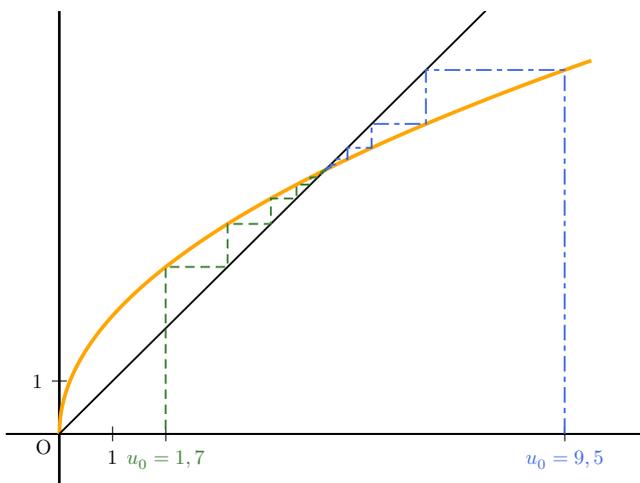


Figure XIX.4 - $u_{n+1} = \sqrt{5u_n}$ avec $u_0 = 1,7$ et $u_0 = 9,5$.

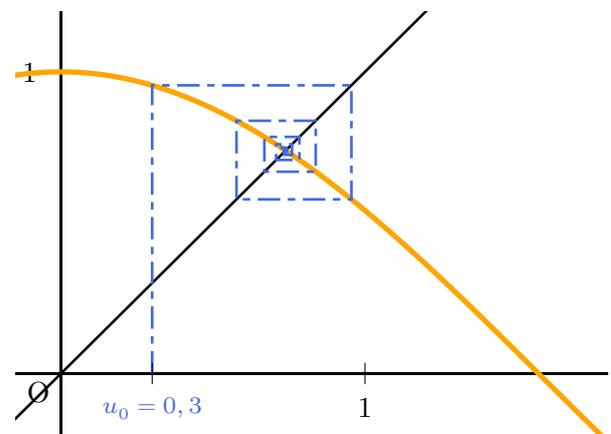


Figure XIX.5 - $u_{n+1} = \cos(u_n)$ avec $u_0 = 0,3$.

Figure XIX.6 – Exemples de suites convergentes

I.2 Stabilité et définition

Pour répondre aux questions soulevées au début du paragraphe (I) , on recherche un intervalle I tel que :

1. $I \subset \mathcal{D}_f$.
2. $f(I) \subset I$
3. $u_0 \in I$

Un tel intervalle est appelé *intervalle de stabilité*.

Remarque : Trouver un segment $[a; b]$ sera notre saint graal.

Définition 1 (Intervalle stable) : On dit que l'intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$ est *stable* par f si $f(I) \subset I$.

Pour montrer qu'un intervalle est stable, on pourra :

- soit étudier la fonction f et le déduire de son tableau de variations,
- soit directement à l'aide d'inégalités.

Dans tous les cas et avant de commencer l'étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il est impératif de faire l'étude de f , d'en dresser son tableau de variation et de tracer son graphe.

Proposition 1 (Existence de la suite) :

Soit $f : \mathcal{D}_f \mapsto \mathbb{R}$ et $I \subset \mathcal{D}_f$ stable par f .

Si $u_0 \in I$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.

Preuve : Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathcal{P}(n) : \text{« } u_n \text{ est bien définie et } u_n \in I \text{ »}$$

- On a $u_0 \in I$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons la propriété vraie au rang n .

On a par hypothèse de récurrence $u_n \in I \subset \mathcal{D}_f$. Donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini.

De plus, comme I est un intervalle stable, $u_{n+1} \in f(I) \subset I$. D'où la propriété au rang $n + 1$ et l'hérédité.

On conclut par principe de récurrence.

ATTENTION | Les relations $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \ln(u_n) \end{cases}$ ne définissent pas une suite !

Exemple 1 : On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$ où, $f : x \mapsto \sqrt{1 + x}$ la fonction associée est définie et strictement croissante de $[-1; +\infty[$ sur \mathbb{R}_+^* .

x	-1	0	8	$+\infty$
f		0	$\sqrt{2}$	3
				$+\infty$

Un intervalle de stabilité peut-être $[0; 8]$, $[-1; 8]$, $[0; +\infty[$ ou $[-1; +\infty[$ mais pas $[-1; 0]$ ou $[8; +\infty[$.

I.3 Variations

Pour déterminer la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il s'agira de déterminer le signe de $f(x) - x$ sur I , et de dresser éventuellement son tableau de signe.

Graphiquement, cela correspond à déterminer la position de la courbe de f par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

Proposition 2 :

Pour tout $x \in I$, on considère le nombre $\delta(x) = f(x) - x$.

1. Si, $\forall x \in I$, $\delta(x) \geq 0$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
2. Si, $\forall x \in I$, $\delta(x) \leq 0$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Exemple 2 : Reprenons la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l'exemple (1).

$$\text{On a } \delta(x) = \sqrt{1+x} - x = \frac{1+x-x^2}{\sqrt{1+x}+x} = \frac{\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{1+x}+x}.$$

x	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	8
$\delta(x)$	-	0	+

Comme on a choisi $I = [0; 8]$, la quantité $\delta(x)$ n'est pas de signe constant sur I . On ne peut pas utiliser cette propriété.

On aurait pu si on avait opté pour les intervalles de stabilité $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 8\right]$ ou $\left[0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ plutôt que $[0; 8]$.

Proposition 3 (Lien avec les fonctions monotones) :

Soit $f : \mathcal{D}_f \mapsto \mathbb{R}$, $I \subset \mathcal{D}_f$ stable par f et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

- Si f est croissante sur I alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et sa monotonie dépend de l'ordre de ses premiers termes :
 - Si $f(u_0) - u_0 \geq 0$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 - Si $f(u_0) - u_0 \leq 0$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- Si f est décroissante sur I , alors les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones et de monotonie contraire.

Globalement, l'idée vient de la définition d'une fonction croissante :

« f est croissante si, et seulement si elle conserve l'ordre ».

Si, par exemple, $u_0 > u_1$ alors $f(u_0) > f(u_1)$, c'est-à-dire $u_1 > u_2$ puis $u_2 = f(u_1) > u_3 = f(u_2)$, ... $u_n = f(u_{n-1}) > u_{n+1} = f(u_n)$, ... et ainsi de suite pour tous les termes de la suite.

La suite est donc décroissante dans ce cas.

Preuve :

- Considérons une fonction quelconque f croissante sur son intervalle de définition et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que ses deux premiers termes soient, par exemple,

$$u_0 \leq u_1. \tag{XIX.1}$$

Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Posons donc la propriété $\mathcal{P}_n : u_n \leq u_{n+1}$.

Initialisation : D'après (XIX.1), $u_0 \leq u_1$ et \mathcal{P}_0 est réalisée.

Hérédité : Supposons que \mathcal{P}_k soit vraie pour un certain entier $k > 0$ et montrons que \mathcal{P}_{k+1} est vérifiée sous cette hypothèse.

$u_k \leq u_{k+1}$	Hypothèse de récurrence	\mathcal{P}_k
$f(u_k) \leq f(u_{k+1})$	f est croissante donc conserve l'ordre	\Downarrow
$u_{k+1} \leq u_{k+2}$	Définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$	\mathcal{P}_{k+1}

La propriété \mathcal{P}_{k+1} est donc vérifiée. On a prouvé l'hérédité de la propriété.

Conclusion : La propriété \mathcal{P}_n , initialisée pour $n = 0$ et héréditaire, est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

La démonstration est analogue pour une suite telle que $u_0 \geq u_1$ qui serait décroissante.

- Dans le cas d'une fonction décroissante, posons $g = f \circ f$. Cette application est croissante sur I.

Posons alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Les deux suites vérifient

$$v_{n+1} = u_{2n+2} = g(u_{2n}) = g(v_n) \quad \text{et, de même,} \quad w_{n+1} = g(w_n).$$

Le point précédent permet alors d'en déduire que chacune des suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.

Supposons, par exemple, que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. On peut donc écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq v_{n+1}$.

En appliquant la fonction f décroissante, on en déduit :

$$f(v_n) \geq f(v_{n+1}) \iff w_n \geq w_{n+1}.$$

La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.

Si l'on supposait que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit décroissante, on en déduirait de la même manière que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

En conclusion, les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones et de monotonie contraire.

Remarque : Les suites d'indice pair et impair sont donc associées à la fonction $g = f \circ f$ et définies par

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{2n+2} = g(u_{2n}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_1 \\ u_{2n+3} = g(u_{2n+1}) \end{cases} .$$

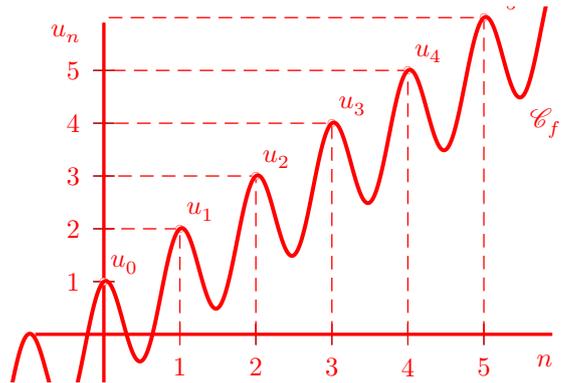
Pour les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

f (dé)croissante ~~\Rightarrow~~ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (dé)croissante.

Considérez, par exemple, la fonction définie par $f(x) = x + \cos(2\pi x)$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = f(u_n) \\ \quad = u_n + \cos(2\pi u_n). \end{cases}$$

Un rapide raisonnement par récurrence montrerait que $u_n = n+1, \forall n \in \mathbb{N}$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et pourtant, f ne l'est pas le moins du monde.



ATTENTION

Exemple 3 : Reprenons encore l'exemple (1) .

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ étant croissante sur $[0; 8]$, on peut en déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.

Comme de plus $v_0 = 8$ et $v_1 = 3$, on en conclut que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Comme par ailleurs elle est minorée par 0, on peut en déduire que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Méthode 2 (Suite récurrente associée à une fonction décroissante) :

Dans le cas d'une fonction décroissante, il s'agira donc :

1. de considérer $g = f \circ f$ et de se ramener au cas g croissant pour conclure sur la monotonie des suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
2. d'étudier le signe de la fonction $x \mapsto g(x) - x$ pour déterminer la monotonie de $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$:
 - si $g(u_0) - u_0 \geq 0$ (resp. ≤ 0), $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante).
 - si $g(u_1) - u_1 \leq 0$ (resp. ≥ 0), $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante (resp. croissante).

Dans le cas où $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent, on ne pourra pas en déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Pour ce faire, il faudra, par exemple, montrer que ces deux suites sont adjacentes et/ou qu'elles convergent vers la même limite. Prouver une divergence pourra se faire en montrant qu'une sous-suite diverge ou que deux convergent vers des limites distinctes. Rien n'est, a priori, assuré.

ATTENTION

I.4 Convergence et point fixe

Rappel 1 (Point fixe) : Soit une fonction f définie sur un ensemble I .

On appelle *point fixe* de f sur I tout réel $x \in I$ vérifiant $f(x) = x$.

Pour les fonctions de la variable réelle à valeurs dans \mathbb{R} cela correspond aux abscisses des points d'intersection de la courbe de f et de la droite d'équation $y = x$.

Proposition 4 (Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge) :

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec I stable par f et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si $\begin{cases} f \text{ continue sur } I \\ \text{et} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } l \in I \end{cases}$, alors l est un point fixe de f i.e. $f(l) = l$.

En particulier, si f n'a pas de points fixes sur I alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut converger.

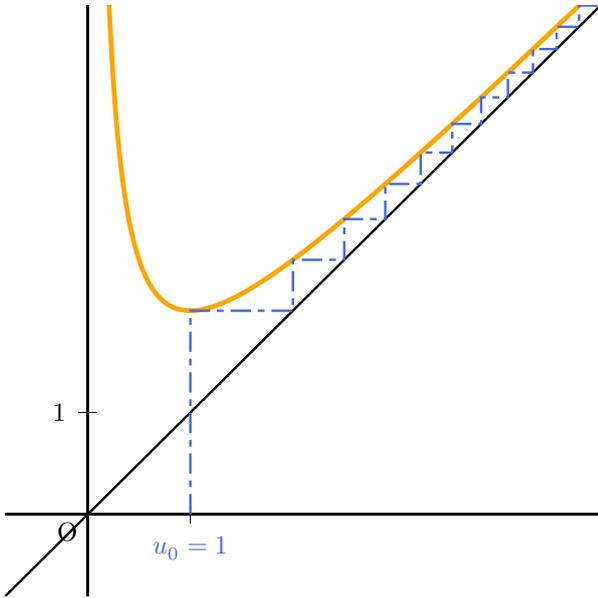


Figure XIX.7 - $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ avec $u_0 = 1$.
 f n'a pas de points fixes et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

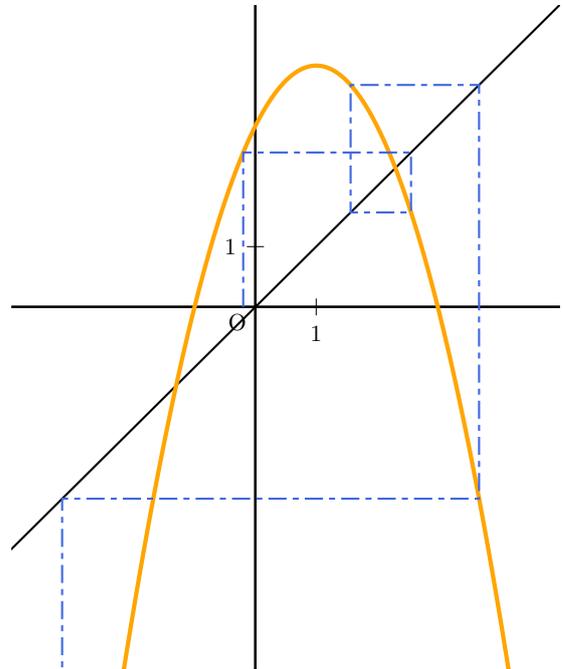


Figure XIX.8 - $u_{n+1} = (u_n + 1)(3 - u_n)$ avec $u_0 = -0,2$.
 f a deux points fixes et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Figure XIX.9 - Exemples de suites divergentes

Preuve : Supposons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers un réel ℓ .

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \ell.$$

Or, la fonction f est continue en $\ell \in I$ i.e. $\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = f(\ell)$.

$$\text{Par composition, on en déduit que } \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(\ell).$$

Donc $f(\ell) = \ell$ i.e. ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Remarque : Pour déterminer les points fixes de f , on étudie les points d'annulation de la fonction $x \mapsto f(x) - x$ sur I .

ATTENTION

Ce théorème ne donne qu'une condition nécessaire sur la limite. Il ne permet en aucun cas de prouver que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Si f n'est pas continue, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas forcément vers un point fixe de f .

Contre-Exemple 4 : Soient $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} & \text{si } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \\ 1 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \end{cases}$$

et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ converge vers $\frac{1}{2}$ qui n'est pas un point fixe de f .

ATTENTION

Exemple 5 : Revenons à l'exemple (1) .

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est bien continue sur $[0; 8]$.

Par conséquent, la limite ℓ de la suite vérifie $\sqrt{1+\ell} = \ell$.

D'où $1 + \ell = \ell^2$ et $\ell \geq 0$. Finalement, on obtient $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

$$\text{Donc, } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Remarques : Dans le cas d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie à partir d'une fonction décroissante où les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent :

- Celles-ci convergent vers des points fixes de $g = f \circ f$. Lors de la recherche de ces derniers il sera bon de remarquer que les points fixes de f sont aussi des points fixes de g . Cela aidera pour d'éventuelles factorisations.

La réciproque est fautive : les points fixes de g ne sont pas nécessairement des points fixes de f .

Contre-Exemple 6 : La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ admet deux points fixes 1 et -1 mais $f \circ f$ n'admet que 1 comme point fixe.

— Si les deux sous suites convergent vers le même point fixe, la suite mère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y converge aussi. À défaut, si elles convergent vers deux points fixes différents, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Reste alors à se poser la question de quelle(s) propriété(s) rajouter à f ou à $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour imposer la convergence voire le choix du point fixe donc se poser la question de son unicité.

Une partie de la réponse se trouve dans les paragraphes suivants.

Définition 2 (Fonction contractante) : Soient I une partie de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

On dit que f est *contractante sur I* si f est k -lipschitzienne sur I avec $0 < k < 1$.

En particulier, d'après l'inégalité des accroissements finis, si f est dérivable sur I et telle que $|f'| \leq k < 1$ sur I alors f y est contractante.

Théorème 5 (Théorème du point fixe) :

(Hors-Programme)

Soit f une application contractante sur un **segment** $[a; b]$ stable par f .

Alors, toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $[a; b]$ par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l'unique point fixe ℓ de f .

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|. \quad (\text{XIX.2})$$

Ce théorème donne, de plus, un algorithme de calcul du point fixe, appelé « méthode des approximations successives », contrairement à d'autres théorèmes de points fixes qui nous assurent seulement de l'existence de points fixes sans indiquer comment les déterminer.

De plus, l'énoncé donne un majorant de l'erreur sous la forme de (XIX.2).

Calcul approché du point fixe : Le terme u_n constitue une estimation du point fixe ℓ de f avec une précision au moins égale à $k^n |u_0 - \ell|$. La méthode sera d'autant plus efficace que l'on aura bien choisi u_0 .

Preuve : Il y a beaucoup de choses à démontrer dans ce théorème.

Existence du point fixe : La fonction est lipschitzienne sur I donc continue.

Posons $\phi : x \mapsto f(x) - x$ et $I = [a; b]$ où $a < b$ sont deux réels.

La fonction ϕ est continue sur I et l'hypothèse $f(I) \subset I$ entraîne $\phi(a) = f(a) - a \geq 0$ et $\phi(b) = f(b) - b \leq 0$.

D'après le *théorème des valeurs intermédiaires*, il existe donc $\ell \in I$ tel que :

$$\phi(\ell) = 0 \iff f(\ell) = \ell.$$

La fonction f possède donc un point fixe ℓ sur I .

Unicité du point fixe : Montrons, par l'absurde, que ℓ est unique.

Supposons donc avoir un deuxième point fixe $\ell_1 \neq \ell \in I$.

Alors $|f(\ell) - f(\ell_1)| < k|\ell - \ell_1| \iff |\ell - \ell_1| < k|\ell - \ell_1|$ qui est absurde avec $k < 1$.

Donc, f admet un unique point fixe ℓ sur I .

Convergence de la suite : Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, par récurrence, par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Par construction, on a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq k|u_n - \ell|$.

Par récurrence, on montre facilement que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$.

Comme $k \in]0; 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = \lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$.

$$\text{Donc, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

Bien remarquer que la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est

ATTENTION

1. une **hypothèse** dans la proposition (4) .
2. une **conclusion** dans le théorème (5).

Exercice 2 : Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{5 + 2u_n} \end{cases}$.

Correction : On commence par étudier rapidement la fonction $f : x \mapsto \sqrt{5 + 2x}$ à la recherche d'un intervalle stable par f . Il est déjà clair que f est croissante sur son ensemble de définition par composition.

La fonction f est dérivable sur $]-\frac{5}{2}; +\infty[$ mais comme il est assez facile de montrer par récurrence que $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on se concentre sur \mathbb{R}_+ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{5 + 2x}} < \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

La fonction f est donc contractante sur \mathbb{R}_+ .

Ses points fixes, s'ils existent, sont solutions de l'équation $x^2 - 2x - 5 = 0$ i.e. $\ell_1 = 1 + \sqrt{6}$ et $\ell_2 = 1 - \sqrt{6} < 0$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_+$, notre seul candidat est $\ell_1 = 1 + \sqrt{6}$.

Par croissance $f([1; 6]) = [1; \sqrt{17}] \subset [1; 6]$, donc $[1; 6]$ est stable par f , contient ℓ_1 et tous les termes de la suite.

L'inégalité des accroissements finis, permet de montrer successivement que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell_1| \leq \frac{1}{\sqrt{5}} |u_n - \ell_1|.$$

Puis,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell_1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n |u_0 - \ell_1|.$$

Comme $\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\right| < 1$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers $\ell_1 = 1 + \sqrt{6}$.

1.5 Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

Lorsque l'énoncé de l'exercice ou du problème ne pose pas de questions intermédiaires, voilà un petit rappel des points essentiels de ce qu'il faut faire pour étudier une suite récurrente d'ordre 1.

Soient $f : \mathcal{D}_f \mapsto \mathbb{R}$, $J \subset \mathcal{D}_f$ un intervalle et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par la relation

$$\begin{cases} u_0 \in J \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- La première chose à vérifier est que la fonction f est continue sur J ou, au moins sur un sous-intervalle I qui vérifiera un maximum des propriétés listées ci-dessous :

ATTENTION

- Si f n'est pas continue, alors tout ce qui va suivre ne s'applique pas.
- S'il n'existe pas d'intervalles bornés stables, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge. La réciproque est fautive.

- I est stable par f et contient au moins un terme de la suite à partir d'un certain rang. C'est la **proposition (1)**.
 - I est un segment $[a; b]$ *i.e.* fermé (pour retenir les limites) et borné (pour pouvoir y appliquer les théorèmes de convergence monotone). À défaut, on devra parfois se contenter d'un intervalle semi-borné et/ou semi-fermé sur lequel on essaiera d'adapter ce qui suit.
- Pour étudier la monotonie de la suite, on étudiera celle de f sur I ainsi que le signe de $\delta(x) = f(x) - x$, en espérant qu'il y soit constant. C'est la **proposition (2)**.

On récupèrera les éventuels points fixes au passage.

Remarque : Le signe de δ dépend de la position de la courbe représentative de f par rapport à la première bissectrice.

- I doit nécessairement contenir un ou des points fixes de f . C'est le contenu de la **proposition (4)** et du **théorème (5)**.

S'il n'en contient pas $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge. Il restera à déterminer le type de divergence : un théorème de comparaison ou l'extraction de deux sous-suites divergeant/convergeant vers des limites différentes suffisent souvent à conclure.

Si f possède des points fixes dans I , plusieurs cas se présentent alors :

- Le cas le plus facile : c'est celui où f est contractante sur I ce que l'on aura prouvé généralement à l'aide de l'inégalité des accroissement fini dans le cas d'une fonction dérivable et telle que $|f'|$ soit majorée par une constante strictement inférieure à 1 sur I .

Dans ce cas il y a un unique point fixe $\alpha \in I$, vers lequel la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On ne peut pas appliquer le **théorème (5)** directement car il n'est pas au programme mais on pourra mener la même démonstration.

ATTENTION

- La fonction f n'est pas nécessairement croissante!
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement monotone!

(b) Le deuxième cas le plus facile : c'est celui où f est croissante.

Dans ce cas la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, et comme elle est bornée elle converge. Il restera à trouver vers lequel, souvent par un argument de monotonie partant de u_0 .

ATTENTION

- La fonction f n'est pas nécessairement contractante!
- La fonction f peut avoir plusieurs points fixes!
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement croissante!

Exemples : $f(x) = x^2$ n'est pas contractante sur $[0; 1]$, elle a plusieurs points fixes (deux), et les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ sont décroissantes.

(c) Un autre cas « gérable » est celui où f est décroissante même si cela se passe en général moins bien. La plupart du temps, on sera dans le cas 4.4a.

ATTENTION

- f n'est pas nécessairement contractante!
- f peut avoir plusieurs points fixes!

Dans le cas contraire, les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones, l'une croissante et l'autre décroissante. Comme elles sont bornées elles convergent toutes les deux, mais pas nécessairement vers la même limite qui sera nécessairement un point fixe de $f \circ f$.

- i. Si le point fixe est unique, les deux suites convergent vers lui ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- ii. S'ils sont pluriels, tout dépendra de si les sous-suites convergent vers le même ou pas.

En général, vous rencontrerez deux cas de figure :

- ◇ les sous-suites sont adjacentes donc convergentes (vers le même point fixe) ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- ◇ les sous-suites convergent vers deux points fixes différents : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

(d) Dernier cas : on n'est dans aucun des cas précédents. Alors il faut réfléchir un peu ... faire preuve de jugeotte et d'initiative ... Étudier le signe de $f(x) - x$, ...L'énoncé vous aidera !

Exercice 3 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = a \in [0; 1] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0.
2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
3. Montrer que la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est 0.
4. Supposons maintenant $a < 0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Correction :

1. Une étude rapide de la parabole $f : x \mapsto x - x^2 = x(1 - x)$ montre que l'intervalle $[0; 1]$ est stable par f . En particulier, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0.

2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Minorée, elle converge.
3. Comme f est continue, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut converger que vers les points fixes de f . 0 étant le seul, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
4. Comme $]-\infty; 0[$ est stable par f et ne contient aucun point fixe, si $a \in \mathbb{R}_-^*$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne saurait converger. Elle diverge.

Commentaires : Comme $f(]1; +\infty[) \subset \mathbb{R}_-^*$, on obtient également la divergence si $a > 1$.

II/ Suites récurrentes linéaires

En mathématiques, on appelle suite récurrente linéaire d'ordre p toute suite à valeurs dans un corps commutatif \mathbb{K} (par exemple \mathbb{R} ou \mathbb{C}) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par une relation de récurrence linéaire de la forme :

$$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_1u_{n+1} + a_0u_n,$$

où a_0, a_1, \dots, a_{p-1} sont p scalaires fixés de \mathbb{K} , a_0 non nul).

Une telle suite est entièrement déterminée par la donnée de ses p premiers termes et par la relation de récurrence.

Les suites récurrentes linéaires d'ordre 1 sont les suites géométriques.

Exemple 7 : Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence linéaire d'ordre p :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = a_0u_n + a_1u_{n+1} + \dots + a_{p-1}u_{n+p-1}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

La relation de récurrence sur $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se résume alors à une relation de récurrence d'ordre 1 sous la forme $U_{n+1} = AU_n$ mais dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Le terme général de la suite U_n est alors déterminé par $U_n = A^n U_0$. Le problème semble alors terminé. Mais la réelle difficulté consiste alors à calculer A^n

Vous étudierez ces suites, liées à la réduction des endomorphismes, plus en détail l'année prochaine.

Même si, toutes les suites récurrentes linéaires d'ordre $p > 1$ peuvent se ramener aux précédentes via le calcul matriciel, celles-ci peuvent aussi s'étudier de manière directe. C'est le cadre de ce dernier paragraphe.

L'étude des suites récurrentes linéaires d'ordre supérieur se ramène à un problème d'algèbre linéaire. L'expression du terme général d'une telle suite est possible pour peu qu'on soit capable de factoriser un

polynôme qui lui est associé, appelé *polynôme caractéristique*.

$$P(X) = X^p - \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i = X^p - a_{p-1} X^{p-1} - a_{p-2} X^{p-2} - \dots - a_1 X - a_0.$$

Son degré est ainsi égal à l'ordre de la relation de récurrence.

En particulier, dans le cas des suites d'ordre 2, le polynôme est de degré 2 et peut donc être factorisé à l'aide d'un calcul de discriminant. Ainsi, le terme général des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 peut être exprimé en utilisant seulement les deux premiers termes, quelques valeurs constantes, quelques opérations élémentaires de l'arithmétique (addition, soustraction, multiplication, exponentielle) et les fonctions sinus et cosinus (si le corps des scalaires est le corps des réels).

Une des suites de ce type est la célèbre suite de Fibonacci, qui peut s'exprimer à partir de puissances faisant intervenir le nombre d'or.

Définition 3 (Suite récurrente linéaire d'ordre 2) : On appelle *récurrente linéaire d'ordre 2* toute suite définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad \text{avec } (a; b) \in \mathbb{K}^2. \quad (\text{XIX.3})$$

Remarque : Si $b = 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison a . Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 1.

Définition 4 (Équation caractéristique) : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par (XIX.3).

On appelle *équation caractéristique* associée à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'équation

$$x^2 - ax - b = 0.$$

II.1 Cas complexe : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Théorème 6 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

avec $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$ et soit Δ le discriminant de son équation caractéristique.

1. Si $\Delta \neq 0$ et r_1, r_2 sont les deux racines distinctes de l'équation caractéristique, alors

$$\exists ! (\lambda; \mu) \in \mathbb{C}^2 \quad \text{tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

2. Si $\Delta = 0$ et r est la racine double de l'équation caractéristique, alors

$$\exists ! (\lambda; \mu) \in \mathbb{C}^2 \quad \text{tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n)r^n.$$

Remarque : L'hypothèse $b \neq 0$ assure qu'il s'agit bien d'une relation de récurrence d'ordre 2. En particulier, 0 n'est pas solution de l'équation caractéristique.

Preuve :

1. Supposons d'abord que l'équation admette deux solutions $r_1 \neq r_2$.

Analyse : Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.

On cherche $(\lambda; \mu) \in \mathbb{C}^2$ satisfaisant cette relation.

Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient
$$\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = u_1 \end{cases}.$$

Comme $r_1 \neq r_2$, ce système admet une unique solution

$$(\lambda; \mu) = \left(\frac{u_1 - r_2 u_0}{r_1 - r_2}; \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} \right).$$

Si λ et μ conviennent, alors leur valeur est donnée par la résolution de ce système et donc le couple $(\lambda; \mu)$ sera unique.

Synthèse : Montrons alors par une récurrence d'ordre 2 sur $n \in \mathbb{N}$ que la propriété

$$\mathcal{P}(n) : u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n,$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par définition de $(\lambda; \mu)$, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vérifiées.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies.

Par hypothèse de récurrence, $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ et $u_{n+1} = \lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}$ donc

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= a u_{n+1} + b u_n = a(\lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}) + b(\lambda r_1^n + \mu r_2^n) \\ &= \lambda r_1^n (a r_1 + b) + \mu r_2^n (a r_2 + b) = \lambda r_1^{n+2} + \mu r_2^{n+2}. \end{aligned}$$

car $r_1^2 = a r_1 + b$ et $r_2^2 = a r_2 + b$.

Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

2. Supposons maintenant que l'équation admette une solution double $r \neq 0$.

Analyse : Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$. On cherche $(\lambda; \mu) \in \mathbb{C}^2$ satisfaisant cette relation.

Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient
$$\begin{cases} \lambda = u_0 \\ \lambda r + \mu r = u_1 \end{cases}.$$

Le déterminant de ce système est $r \neq 0$, donc il admet une unique solution

$$(\lambda; \mu) = \left(u_0; \frac{u_1 - r u_0}{r} \right).$$

S'il existe, le couple $(\lambda; \mu)$ sera unique.

Synthèse : Montrons alors par récurrence d'ordre 2 sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : u_n = \lambda r^n + \mu n r^n.$$

Par définition de $(\lambda; \mu)$, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vérifiées.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies.

Par hypothèse de récurrence, $u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$ et $u_{n+1} = \lambda r^{n+1} + \mu(n+1)r^{n+1}$ donc

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= a u_{n+1} + b u_n = a(\lambda r^{n+1} + \mu(n+1)r^{n+1}) + b(\lambda r^n + \mu n r^n) \\ &= \lambda r^n (ar + b) + \mu n r^n (ar + b) + \mu r^{n+1} a \\ &= \lambda r^{n+2} + \mu(n+2)r^{n+2} \text{ car } r^2 = ar + b \text{ et } r = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

II.2 Cas réel : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

On suppose ici que $(a; b) \in \mathbb{R}^2$. On cherche une suite à valeurs réelles.

Théorème 7 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{R}^N vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n,$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ et soit Δ le discriminant de son équation caractéristique.

1. Si $\Delta > 0$ et r_1, r_2 sont les deux racines distinctes et réelles de l'équation caractéristique, alors

$$\exists ! (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

2. Si $\Delta = 0$ et r est la racine double de l'équation caractéristique, alors

$$\exists ! (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n) r^n.$$

3. Si $\Delta < 0$ et $r e^{\pm i\omega}$ sont les deux racines complexes et conjuguées de l'équation caractéristique, alors

$$\exists ! (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(\lambda \cos(\omega n) + \mu \sin(\omega n) \right) r^n.$$

Preuve : Les deux premiers cas s'obtiennent comme dans le cas complexe. Les scalaires $(\lambda; \mu)$ déterminés en résolvant les systèmes introduits dans la preuve seront cette fois réels.

3. Supposons que l'équation admette deux racines complexes (non réelles) conjuguées $r_1 = r e^{i\omega}$ et $r_2 = \bar{r}_1$.

D'après le théorème précédent, on sait qu'il existe $(A; B) \in \mathbb{C}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = A r^n e^{in\omega} + B r^n e^{-in\omega}$.

Montrons que $B = \bar{A}$: On sait que :

$$\begin{cases} A + B = u_0 \\ Ar_1 + B\bar{r}_1 = u_1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{u_1 - \bar{r}_1 u_0}{r_1 - \bar{r}_1} \\ B = \frac{u_1 - r_1 u_0}{\bar{r}_1 - r_1} = \bar{A}. \end{cases} \quad (r_1 \neq \bar{r}_1 \text{ car } r_1 \notin \mathbb{R})$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= Ar^n e^{in\omega} + \bar{A}r^n e^{-in\omega} \\ &= r^n \times 2\text{Re}(A e^{in\omega}) \\ &= r^n (2\text{Re}(A) \cos(n\omega) - 2\text{Im}(A) \sin(n\omega)) \\ &= r^n (\lambda \cos(n\omega) + \mu \sin(n\omega)). \end{aligned}$$

Exemple 8 (Suite de Fibonacci [2]) : Un exemple classique de chez classique, la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Cette suite a pour équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = 1 + 4 = 5$ et dont les racines sont :

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \psi = -\frac{1}{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

On peut donc écrire $F_n = \lambda\phi^n + \mu\psi^n$ puis, avec les conditions initiales qui imposent $\lambda = -\mu = \frac{1}{\sqrt{5}}$:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \psi^n).$$

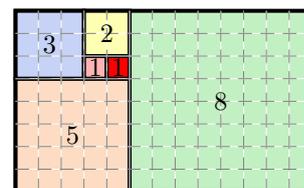
[2]. **FIBONACCI Leonardo**, italien, 1175?-1240?. De son vrai nom Léonard de Pise, dit Fibonacci (signifiant « fils de Bonaccio »), Leonardo est le fils d'un administrateur de la ville de Pise. Commerçant et grand voyageur, il parcourut l'Europe et les pays d'orient tout en s'imprégnant des mathématiques de son époque inspirées des mondes grecs, indiens et arabes.

Dans son *Liber Abaci* (Livre de calcul), publié en 1202, principalement consacré aux calculs commerciaux, il affine et résout des problèmes algébriques déjà rencontrés dans l'œuvre du mathématicien **Al Khwarizmi**.

Fibonacci fait grand usage des nombres dits « arabes » (système décimal positionnel), du calcul fractionnaire et de la méthode de résolution des équations, dite de fausse position. Il publiera aussi un traité de géométrie, *Practica geometriae* (1220), où il applique des méthodes algébriques à des problèmes géométriques, et un traité sur le calcul des racines carrées et cubiques (*Liber Quadratorum*, 1225).

Le *Liber Abaci* est aussi un recueil de « petits » problèmes comme celui, resté célèbre, de la reproduction des lapins :

Possédant au départ un couple de lapins, combien de couples de lapins obtient-on en douze mois si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du second mois de son existence ?



On est ainsi conduit à la célèbre séquence des nombres de Fibonacci.

Exercice 4 : Déterminer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sachant que $\begin{cases} u_0 = -1, u_1 = 0 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$.

Correction : $E_c : r^2 - 4r + 4 = 0$ a une solution double 2.

D'après le cours, il existe k_1 et k_2 tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (k_1 n + k_2)2^n.$$

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} k_2 = -1 \\ (k_1 + k_2) \times 2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = 1 \end{cases}.$$

En conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n - 1)2^n.$$

- Algorithme, 10
- Chaos, 2
- Continuité, 2, 8
- Ensemble
 - stable, 3
- Équation
 - caractéristique, 15
- Fonction
 - continue, 2
 - contractante, 10
 - lipschitzienne, 10
 - monotone, 5
- Intervalle
 - stable, 3
- Inégalité
 - des accroissements finis, 10
- Méthode
 - Étude d'une suite récurrente, 7
 - Représentation d'une suite récurrente, 3
- Point
 - fixe, 8, 12
- Segment, 10
- Suite
 - adjacente, 13
 - géométrique, 14
 - récurrente, 2
 - linéaire d'ordre 2, 15
- Système
 - dynamique, 2
- Théorème
 - des valeurs intermédiaires, 10

