

Suites récurrentes

Cours de PTSI

Lycée Jules Garnier

Chapitre 19



- 1 Suites récurrentes
- 2 Suites récurrentes linéaires



Les exercices que l'on vous a proposés jusqu'ici ont pu vous donner l'impression que pour définir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence, il suffisait de se donner une fonction f quelconque, un u_0 dans le domaine de définition de f , et de décréter simplement que « $u_{n+1} = f(u_n)$ ». Quelle illusion !



Les exercices que l'on vous a proposés jusqu'ici ont pu vous donner l'impression que pour définir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence, il suffisait de se donner une fonction f quelconque, un u_0 dans le domaine de définition de f , et de décréter simplement que « $u_{n+1} = f(u_n)$ ». Quelle illusion !

Notons par exemple f la fonction $x \mapsto 2 + \sqrt{2-x}$ définie sur $] -\infty ; 2]$ et posons :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Comme $u_0 \in] -\infty ; 2]$, on peut calculer $u_1 = f(u_0) = 3$, mais ensuite???? Aucun sens! Quelle valeur pour u_2 ?

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est ici pas définie.



Pire, et seulement pour la culture car très éloigné de notre niveau, le théorème de Sharkovsky démontré en 1964 sur les fonctions chaotiques a fait l'objet de recherche active lors des dernières décennies. On ne parle plus des siècles derniers ici et une simple suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in [0; 1] \\ u_{n+1} = 4\mu(1 - u_n)u_n, \mu \in [0; 1] \end{cases}$$

donne bien des soucis.



Pire, et seulement pour la culture car très éloigné de notre niveau, le théorème de Sharkovsky démontré en 1964 sur les fonctions chaotiques a fait l'objet de recherche active lors des dernières décennies. On ne parle plus des siècles derniers ici et une simple suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in [0; 1] \\ u_{n+1} = 4\mu(1 - u_n)u_n, \mu \in [0; 1] \end{cases}$$

donne bien des soucis.

Ce théorème donne des contraintes sur la présence de points périodiques lorsqu'on itère la fonction f , c'est-à-dire de points u_0 tels que la suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$ correspondante soit périodique.



Pire, et seulement pour la culture car très éloigné de notre niveau, le théorème de Sharkovsky démontré en 1964 sur les fonctions chaotiques a fait l'objet de recherche active lors des dernières décennies. On ne parle plus des siècles derniers ici et une simple suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in [0; 1] \\ u_{n+1} = 4\mu(1 - u_n)u_n, \mu \in [0; 1] \end{cases}$$

donne bien des soucis.

Ce théorème donne des contraintes sur la présence de points périodiques lorsqu'on itère la fonction f , c'est-à-dire de points u_0 tels que la suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$ correspondante soit périodique.

Il fait partie des premiers exemples remarquables de la théorie des systèmes dynamiques, introduisant la notion de chaos. Sa popularité est telle qu'il se retient souvent sous la forme d'un « slogan », correspondant à un énoncé simplifié :

3-cycle implique chaos



Pire, et seulement pour la culture car très éloigné de notre niveau, le théorème de Sharkovsky démontré en 1964 sur les fonctions chaotiques a fait l'objet de recherche active lors des dernières décennies. On ne parle plus des siècles derniers ici et une simple suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in [0; 1] \\ u_{n+1} = 4\mu(1 - u_n)u_n, \mu \in [0; 1] \end{cases}$$

donne bien des soucis.

Ce théorème donne des contraintes sur la présence de points périodiques lorsqu'on itère la fonction f , c'est-à-dire de points u_0 tels que la suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$ correspondante soit périodique.

Il fait partie des premiers exemples remarquables de la théorie des systèmes dynamiques, introduisant la notion de chaos. Sa popularité est telle qu'il se retient souvent sous la forme d'un « slogan », correspondant à un énoncé simplifié :

3-cycle implique chaos

Il faut comprendre par là que toute fonction continue présentant un cycle de période 3 admet un cycle de période n pour tout entier n .



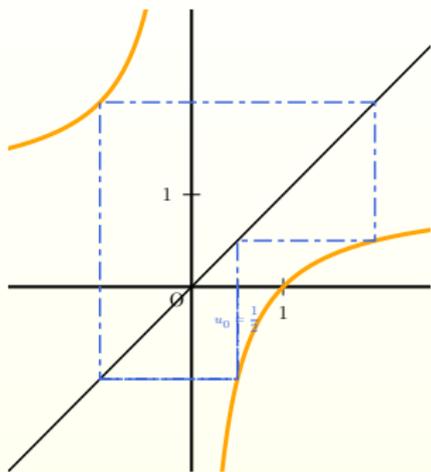


Figure 1 – $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{u_n}$ avec $u_0 = \frac{1}{2}$.

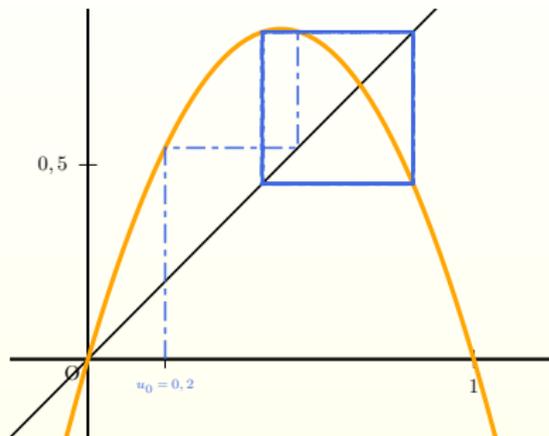


Figure 2 – $u_{n+1} = 3,4u_n(1 - u_n)$ avec $u_0 = 0,2$.

Figure 3 – Exemples de suites chaotiques. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède un cycle.



Mais comment différencier alors les exemples qui marchent de ceux qui ne marchent pas ?



Mais comment différencier alors les exemples qui marchent de ceux qui ne marchent pas ?

C'est tout le propos de ce chapitre.



I. Suites récurrentes

1 Suites récurrentes

- Représentation graphique d'une suite récurrente
- Stabilité et définition
- Variations
- Convergence et point fixe
- Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

2 Suites récurrentes linéaires



I. Suites récurrentes

Dans tout cette section, f est une fonction continue sur un intervalle I à valeurs réelles.

On étudie la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$



I. Suites récurrentes

Dans toute cette section, f est une fonction continue sur un intervalle I à valeurs réelles.

On étudie la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Exercice 1 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

① Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.



I. Suites récurrentes

Dans toute cette section, f est une fonction continue sur un intervalle I à valeurs réelles.

On étudie la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Exercice 1 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- 1 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.
- 2 En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.



I. Suites récurrentes

1. Représentation graphique d'une suite récurrente

Méthode 1 :

Pour visualiser une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ dans un repère :

- On trace la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f associée et de la première bissectrice $(\Delta) : x \mapsto x$.



I. Suites récurrentes

1. Représentation graphique d'une suite récurrente

Méthode 1 :

Pour visualiser une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ dans un repère :

- On trace la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f associée et de la première bissectrice $(\Delta) : x \mapsto x$.
- On place le point $(u_0; 0)$.



I. Suites récurrentes

1. Représentation graphique d'une suite récurrente

Méthode 1 :

Pour visualiser une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ dans un repère :

- On trace la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f associée et de la première bissectrice (Δ) : $x \mapsto x$.
- On place le point $(u_0; 0)$.
- On trouve $u_1 = f(u_0)$ à l'aide de \mathcal{C}_f .



I. Suites récurrentes

1. Représentation graphique d'une suite récurrente

Méthode I :

Pour visualiser une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ dans un repère :

- On trace la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f associée et de la première bissectrice (Δ) : $x \mapsto x$.
- On place le point $(u_0; 0)$.
- On trouve $u_1 = f(u_0)$ à l'aide de \mathcal{C}_f .
- On reporte le $(u_1; 0)$ à l'aide la bissectrice.



I. Suites récurrentes

1. Représentation graphique d'une suite récurrente

Méthode I :

Pour visualiser une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ dans un repère :

- On trace la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f associée et de la première bissectrice $(\Delta) : x \mapsto x$.
- On place le point $(u_0; 0)$.
- On trouve $u_1 = f(u_0)$ à l'aide de \mathcal{C}_f .
- On reporte le $(u_1; 0)$ à l'aide la bissectrice.
- On itère le procédé ...



I. Suites récurrentes

1. Représentation graphique d'une suite récurrente

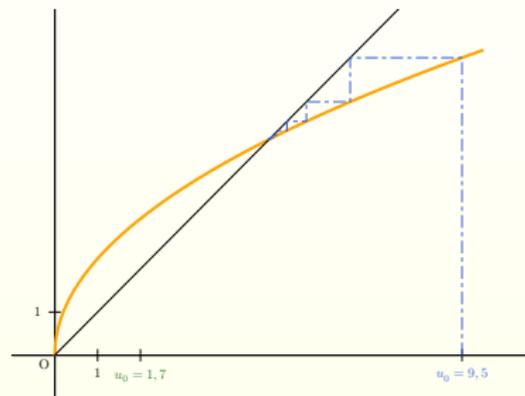


Figure 4 – $u_{n+1} = \sqrt{5u_n}$ avec $u_0 = 1,7$ et $u_0 = 9,5$.

Figure 6 – Exemples de suites convergentes



I. Suites récurrentes

1. Représentation graphique d'une suite récurrente

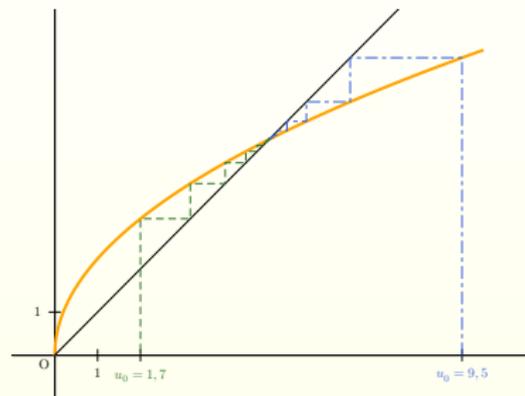


Figure 4 – $u_{n+1} = \sqrt{5u_n}$ avec $u_0 = 1,7$ et $u_0 = 9,5$.

Figure 6 – Exemples de suites convergentes



I. Suites récurrentes

1. Représentation graphique d'une suite récurrente

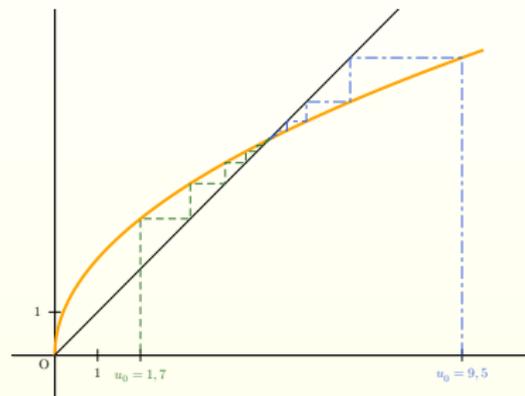


Figure 4 - $u_{n+1} = \sqrt{5u_n}$ avec $u_0 = 1,7$ et $u_0 = 9,5$.

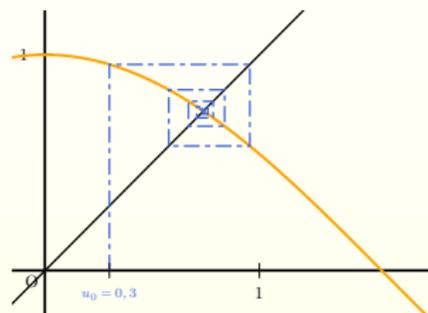


Figure 5 - $u_{n+1} = \cos(u_n)$ avec $u_0 = 0,3$.

Figure 6 – Exemples de suites convergentes



I. Suites récurrentes

2. Stabilité et définition

Pour répondre aux questions soulevées au début du paragraphe (I), on recherche un intervalle I tel que :

$$\textcircled{1} \quad I \subset \mathcal{D}_f.$$



I. Suites récurrentes

2. Stabilité et définition

Pour répondre aux questions soulevées au début du paragraphe (I), on recherche un intervalle I tel que :

$$\textcircled{1} \quad I \subset \mathcal{D}_f.$$

$$\textcircled{2} \quad f(I) \subset I$$



I. Suites récurrentes

2. Stabilité et définition

Pour répondre aux questions soulevées au début du paragraphe (I), on recherche un intervalle I tel que :

❶ $I \subset \mathcal{D}_f.$

❷ $f(I) \subset I$

❸ $u_0 \in I$



I. Suites récurrentes

2. Stabilité et définition

Pour répondre aux questions soulevées au début du paragraphe (I), on recherche un intervalle I tel que :

❶ $I \subset \mathcal{D}_f.$

❷ $f(I) \subset I$

❸ $u_0 \in I$

Un tel intervalle est appelé **intervalle de stabilité**.



I. Suites récurrentes

2. Stabilité et définition

Pour répondre aux questions soulevées au début du paragraphe (I), on recherche un intervalle I tel que :

$$\textcircled{1} \quad I \subset \mathcal{D}_f.$$

$$\textcircled{2} \quad f(I) \subset I$$

$$\textcircled{3} \quad u_0 \in I$$

Un tel intervalle est appelé **intervalle de stabilité**.

Remarque : Trouver un segment $[a; b]$ sera notre saint graal.



I. Suites récurrentes

2. Stabilité et définition

Définition 1 (Intervalle stable) :

On dit que l'intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$ est **stable** par f si $f(I) \subset I$.



I. Suites récurrentes

2. Stabilité et définition

Définition 1 (Intervalle stable) :

On dit que l'intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$ est **stable** par f si $f(I) \subset I$.

Pour montrer qu'un intervalle est stable, on pourra :

- soit étudier la fonction f et le déduire de son tableau de variations,



I. Suites récurrentes

2. Stabilité et définition

Définition 1 (Intervalle stable) :

On dit que l'intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$ est **stable** par f si $f(I) \subset I$.

Pour montrer qu'un intervalle est stable, on pourra :

- soit étudier la fonction f et le déduire de son tableau de variations,
- soit directement à l'aide d'inégalités.



I. Suites récurrentes

2. Stabilité et définition

Définition 1 (Intervalle stable) :

On dit que l'intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$ est **stable** par f si $f(I) \subset I$.

Pour montrer qu'un intervalle est stable, on pourra :

- soit étudier la fonction f et le déduire de son tableau de variations,
- soit directement à l'aide d'inégalités.

Dans tous les cas et avant de commencer l'étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il est impératif de faire l'étude de f , d'en dresser son tableau de variation et de tracer son graphe.



I. Suites récurrentes

2. Stabilité et définition

Définition 1 (Intervalle stable) :

On dit que l'intervalle $I \subset \mathcal{D}_f$ est **stable** par f si $f(I) \subset I$.

Pour montrer qu'un intervalle est stable, on pourra :

- soit étudier la fonction f et le déduire de son tableau de variations,
- soit directement à l'aide d'inégalités.

Dans tous les cas et avant de commencer l'étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il est impératif de faire l'étude de f , d'en dresser son tableau de variation et de tracer son graphe.

Proposition 1 (Existence de la suite) :

Soit $f : \mathcal{D}_f \mapsto \mathbb{R}$ et $I \subset \mathcal{D}_f$ stable par f .

Si $u_0 \in I$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.



I. Suites récurrentes

2. Stabilité et définition

ATTENTION

Les relations $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \ln(u_n) \end{cases}$ ne définissent pas une suite !



I. Suites récurrentes

2. Stabilité et définition

ATTENTION

Les relations $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \ln(u_n) \end{cases}$ ne définissent pas une suite !

Exemple 1 :

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$ où,

$f : x \mapsto \sqrt{1 + x}$ la fonction associée est définie et strictement croissante de $[-1; +\infty[$ sur \mathbb{R}_+^* .

x	-1	0	8	$+\infty$	
f		0	$\sqrt{2}$	3	$+\infty$

I. Suites récurrentes

2. Stabilité et définition

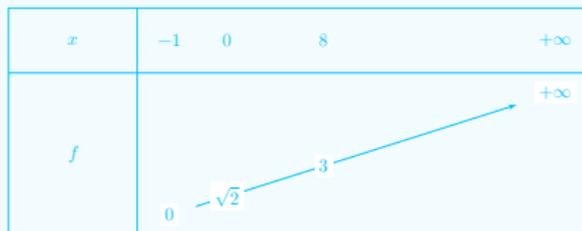
ATTENTION

Les relations $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \ln(u_n) \end{cases}$ ne définissent pas une suite !

Exemple 1 :

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$ où,

$f : x \mapsto \sqrt{1 + x}$ la fonction associée est définie et strictement croissante de $[-1; +\infty[$ sur \mathbb{R}_+^* .



Un intervalle de stabilité peut-être $[0; 8]$.

I. Suites récurrentes

2. Stabilité et définition

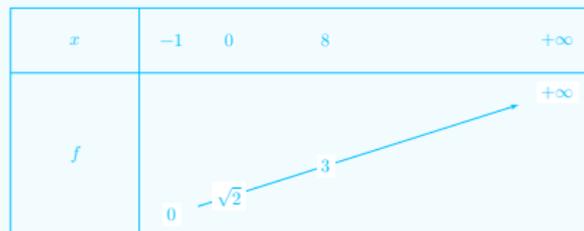
ATTENTION

Les relations $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \ln(u_n) \end{cases}$ ne définissent pas une suite !

Exemple 1 :

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$ où,

$f : x \mapsto \sqrt{1 + x}$ la fonction associée est définie et strictement croissante de $[-1; +\infty[$ sur \mathbb{R}_+^* .



Un intervalle de stabilité peut-être $[0; 8]$, $[-1; 8]$.

I. Suites récurrentes

2. Stabilité et définition

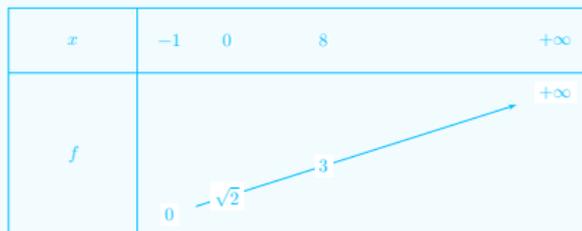
ATTENTION

Les relations $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \ln(u_n) \end{cases}$ ne définissent pas une suite !

Exemple 1 :

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$ où,

$f : x \mapsto \sqrt{1 + x}$ la fonction associée est définie et strictement croissante de $[-1; +\infty[$ sur \mathbb{R}_+^* .



Un intervalle de stabilité peut-être $[0; 8]$, $[-1; 8]$, $[0; +\infty[$.

I. Suites récurrentes

2. Stabilité et définition

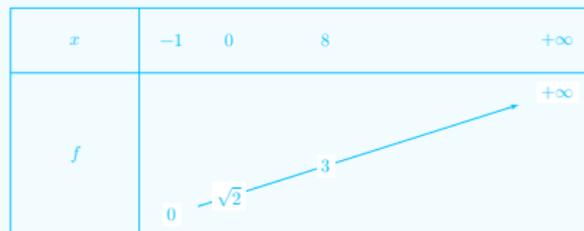
ATTENTION

Les relations $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \ln(u_n) \end{cases}$ ne définissent pas une suite !

Exemple 1 :

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$ où,

$f : x \mapsto \sqrt{1 + x}$ la fonction associée est définie et strictement croissante de $[-1; +\infty[$ sur \mathbb{R}_+^* .



Un intervalle de stabilité peut-être $[0; 8]$, $[-1; 8]$, $[0; +\infty[$ ou $[-1; +\infty[$.

I. Suites récurrentes

2. Stabilité et définition

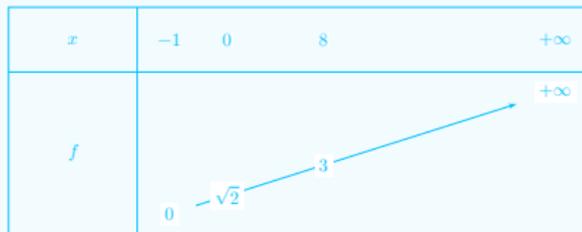
ATTENTION

Les relations $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \ln(u_n) \end{cases}$ ne définissent pas une suite !

Exemple 1 :

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$ où,

$f : x \mapsto \sqrt{1 + x}$ la fonction associée est définie et strictement croissante de $[-1; +\infty[$ sur \mathbb{R}_+^* .



Un intervalle de stabilité peut-être $[0; 8]$, $[-1; 8]$, $[0; +\infty[$ ou $[-1; +\infty[$ mais pas $[-1; 0]$ ou $[8; +\infty]$.

I. Suites récurrentes

3. Variations

Proposition 2 :

Pour tout $x \in I$, on considère le nombre $\delta(x) = f(x) - x$.

④ Si, $\forall x \in I$, $\delta(x) \geq 0$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Exemple 2 :

Reprenons la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l'exemple (1) .

$$\text{On a } \delta(x) = \sqrt{1+x} - x = \frac{1+x-x^2}{\sqrt{1+x}+x} = \frac{\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{1+x}+x}.$$

x	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	8
$\delta(x)$	-	0	+

I. Suites récurrentes

3. Variations

Proposition 2 :

Pour tout $x \in I$, on considère le nombre $\delta(x) = f(x) - x$.

- ❶ Si, $\forall x \in I$, $\delta(x) \geq 0$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- ❷ Si, $\forall x \in I$, $\delta(x) \leq 0$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Exemple 2 :

x	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	8
$\delta(x)$	-	0	+

Comme on a choisi $I = [0; 8]$, la quantité $\delta(x)$ n'est pas de signe constant sur I . On ne peut pas utiliser cette propriété.

On aurait pu si on avait opté pour les intervalles de stabilité $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 8\right]$ ou $\left[0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ plutôt que $[0; 8]$.

I. Suites récurrentes

3. Variations

Proposition 3 (Lien avec les fonctions monotones) :

Soit $f : \mathcal{D}_f \mapsto \mathbb{R}$, $I \subset \mathcal{D}_f$ stable par f et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

- Si f est croissante sur I alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et sa monotonie dépend de l'ordre de ses premiers termes :



I. Suites récurrentes

3. Variations

Proposition 3 (Lien avec les fonctions monotones) :

Soit $f : \mathcal{D}_f \mapsto \mathbb{R}$, $I \subset \mathcal{D}_f$ stable par f et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

- Si f est croissante sur I alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et sa monotonie dépend de l'ordre de ses premiers termes :
 - ◇ Si $f(u_0) - u_0 \geq 0$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.



I. Suites récurrentes

3. Variations

Proposition 3 (Lien avec les fonctions monotones) :

Soit $f : \mathcal{D}_f \mapsto \mathbb{R}$, $I \subset \mathcal{D}_f$ stable par f et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

- Si f est croissante sur I alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et sa monotonie dépend de l'ordre de ses premiers termes :
 - ◇ Si $f(u_0) - u_0 \geq 0$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 - ◇ Si $f(u_0) - u_0 \leq 0$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.



I. Suites récurrentes

3. Variations

Proposition 3 (Lien avec les fonctions monotones) :

Soit $f : \mathcal{D}_f \mapsto \mathbb{R}$, $I \subset \mathcal{D}_f$ stable par f et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

- Si f est croissante sur I alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et sa monotonie dépend de l'ordre de ses premiers termes :
 - ◇ Si $f(u_0) - u_0 \geq 0$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 - ◇ Si $f(u_0) - u_0 \leq 0$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- Si f est décroissante sur I , alors les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones et de monotonie contraire.



I. Suites récurrentes

3. Variations

Proposition 3 (Lien avec les fonctions monotones) :

Soit $f : \mathcal{D}_f \mapsto \mathbb{R}$, $I \subset \mathcal{D}_f$ stable par f et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

- Si f est croissante sur I alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et sa monotonie dépend de l'ordre de ses premiers termes :
 - ◇ Si $f(u_0) - u_0 \geq 0$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 - ◇ Si $f(u_0) - u_0 \leq 0$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- Si f est décroissante sur I , alors les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones et de monotonie contraire.

Remarque : Les suites d'indice pair et impair sont donc associées à la fonction $g = f \circ f$ et définies par

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{2n+2} = g(u_{2n}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_1 \\ u_{2n+3} = g(u_{2n+1}) \end{cases} .$$



I. Suites récurrentes

3. Variations

Pour les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

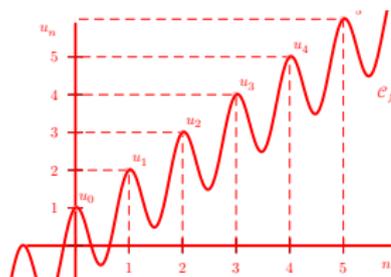
f (dé)croissante ~~↔~~ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (dé)croissante.

Considérez, par exemple, la fonction définie par $f(x) = x + \cos(2\pi x)$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1, \\ u_{n+1} &= f(u_n) \\ &= u_n + \cos(2\pi u_n). \end{cases}$$

Un rapide raisonnement par récurrence montrerait que $u_n = n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$ donc

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et pourtant, f ne l'est pas le moins du monde.



ATTENTION



I. Suites récurrentes

3. Variations

Exemple 3 :

Reprenons encore l'exemple (1) .

- 1 La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ étant croissante sur $[0;8]$, on peut en déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.



I. Suites récurrentes

3. Variations

Exemple 3 :

Reprenons encore l'exemple (1) .

- 1 La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ étant croissante sur $[0;8]$, on peut en déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.
- 2 Comme de plus $v_0 = 8$ et $v_1 = 3$, on en conclut que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.



I. Suites récurrentes

3. Variations

Exemple 3 :

Reprenons encore l'exemple (1) .

- 1 La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ étant croissante sur $[0;8]$, on peut en déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.
- 2 Comme de plus $v_0 = 8$ et $v_1 = 3$, on en conclut que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- 3 Comme par ailleurs elle est minorée par 0, on peut en déduire que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.



I. Suites récurrentes

3. Variations

Méthode 2 :

Dans le cas d'une fonction décroissante, il s'agira donc :

- ④ de considérer $g = f \circ f$ et de se ramener au cas g croissant pour conclure sur la monotonie des suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.



I. Suites récurrentes

3. Variations

Méthode 2 :

Dans le cas d'une fonction décroissante, il s'agira donc :

- 1 de considérer $g = f \circ f$ et de se ramener au cas g croissant pour conclure sur la monotonie des suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
- 2 d'étudier le signe de la fonction $x \mapsto g(x) - x$ pour déterminer la monotonie de $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$:



I. Suites récurrentes

3. Variations

Méthode 2 :

Dans le cas d'une fonction décroissante, il s'agira donc :

- 1 de considérer $g = f \circ f$ et de se ramener au cas g croissant pour conclure sur la monotonie des suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
- 2 d'étudier le signe de la fonction $x \mapsto g(x) - x$ pour déterminer la monotonie de $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$:
 - si $g(u_0) - u_0 \geq 0$ (resp. ≤ 0), $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante).



I. Suites récurrentes

3. Variations

Méthode 2 :

Dans le cas d'une fonction décroissante, il s'agira donc :

- 1 de considérer $g = f \circ f$ et de se ramener au cas g croissant pour conclure sur la monotonie des suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
- 2 d'étudier le signe de la fonction $x \mapsto g(x) - x$ pour déterminer la monotonie de $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$:
 - si $g(u_0) - u_0 \geq 0$ (resp. ≤ 0), $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante).
 - si $g(u_1) - u_1 \leq 0$ (resp. ≥ 0), $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante (resp. croissante).



I. Suites récurrentes

3. Variations

Méthode 2 :

Dans le cas d'une fonction décroissante, il s'agira donc :

- 1 de considérer $g = f \circ f$ et de se ramener au cas g croissant pour conclure sur la monotonie des suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
- 2 d'étudier le signe de la fonction $x \mapsto g(x) - x$ pour déterminer la monotonie de $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$:
 - si $g(u_0) - u_0 \geq 0$ (resp. ≤ 0), $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante).
 - si $g(u_1) - u_1 \leq 0$ (resp. ≥ 0), $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante (resp. croissante).

ATTENTION

Dans le cas où $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent, on ne pourra pas en déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Pour ce faire, il faudra, par exemple, montrer que ces deux suites sont adjacentes et/ou qu'elles convergent vers la même limite. Prouver une divergence pourra se faire en montrant qu'une sous-suite diverge ou que deux convergent vers des limites distinctes. Rien n'est, a priori, assuré.



I. Suites récurrentes

4. Convergence et point fixe

Rappel (Point fixe) :

Soit une fonction f définie sur un ensemble I .

On appelle **point fixe** de f sur I tout réel $x \in I$ vérifiant $f(x) = x$.

Pour les fonctions de la variable réelle à valeurs dans \mathbb{R} cela correspond aux abscisses des points d'intersection de la courbe de f et de la droite d'équation $y = x$.



I. Suites récurrentes

4. Convergence et point fixe

Rappel (Point fixe) :

Soit une fonction f définie sur un ensemble I .

On appelle **point fixe** de f sur I tout réel $x \in I$ vérifiant $f(x) = x$.

Pour les fonctions de la variable réelle à valeurs dans \mathbb{R} cela correspond aux abscisses des points d'intersection de la courbe de f et de la droite d'équation $y = x$.

Proposition (Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge) :

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec I stable par f et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si $\begin{cases} f \text{ continue sur } I \\ \text{et} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \in I \end{cases}$, alors ℓ est un point fixe de f i.e. $f(\ell) = \ell$.

I. Suites récurrentes

4. Convergence et point fixe

Proposition 4 (Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge) :

Soient $f : I \mapsto \mathbb{R}$ avec I stable par f et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si $\begin{cases} f \text{ continue sur } I \\ \text{et} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \in I \end{cases}$, alors ℓ est un point fixe de f i.e. $f(\ell) = \ell$.

En particulier, si f n'a pas de points fixes sur I alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut converger.



I. Suites récurrentes

4. Convergence et point fixe

Proposition 4 (Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge) :

Soient $f : I \mapsto \mathbb{R}$ avec I stable par f et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si $\begin{cases} f \text{ continue sur } I \\ \text{et} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \in I \end{cases}$, alors ℓ est un point fixe de f i.e. $f(\ell) = \ell$.

En particulier, si f n'a pas de points fixes sur I alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut converger.

Remarque : Pour déterminer les points fixes de f , on étudie les points d'annulation de la fonction $x \mapsto f(x) - x$ sur I .



I. Suites récurrentes

4. Convergence et point fixe

Proposition 4 (Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge) :

Soient $f : I \mapsto \mathbb{R}$ avec I stable par f et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si $\begin{cases} f \text{ continue sur } I \\ \text{et} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \in I \end{cases}$, alors ℓ est un point fixe de f i.e. $f(\ell) = \ell$.

En particulier, si f n'a pas de points fixes sur I alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut converger.

Remarque : Pour déterminer les points fixes de f , on étudie les points d'annulation de la fonction $x \mapsto f(x) - x$ sur I .

ATTENTION

Ce théorème ne donne qu'une condition nécessaire sur la limite. Il ne permet en aucun cas de prouver que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.



I. Suites récurrentes

4. Convergence et point fixe

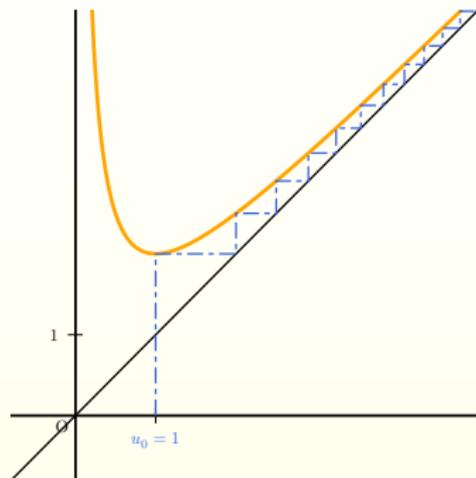


Figure 7 – $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ avec $u_0 = 1$.
 f n'a pas de points fixes et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

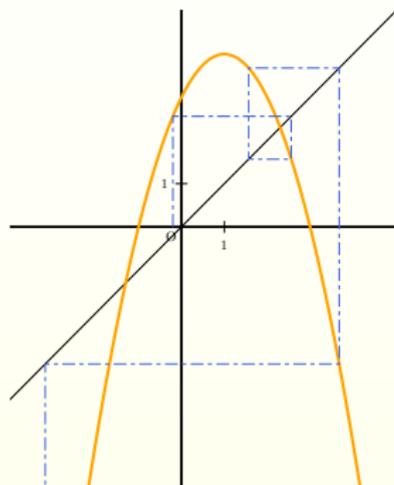


Figure 8 – $u_{n+1} = (u_n + 1)(3 - u_n)$ avec $u_0 = -0,2$.
 f a deux points fixes et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Figure 9 – Exemples de suites divergentes



I. Suites récurrentes

4. Convergence et point fixe

Si f n'est pas continue, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas forcément vers un point fixe de f .

Soient $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} & \text{si } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right[\\ 1 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \end{cases}$$

ATTENTION

et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ converge vers $\frac{1}{2}$ qui n'est pas un point fixe de f .



I. Suites récurrentes

4. Convergence et point fixe

Exemple 4 :

Revenons à l' exemple (1) .

- La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est bien continue sur $[0; 8]$.



I. Suites récurrentes

4. Convergence et point fixe

Exemple 4 :

Revenons à l' exemple (1) .

- La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est bien continue sur $[0; 8]$.
- Par conséquent, la limite ℓ de la suite vérifie $\sqrt{1+\ell} = \ell$.

D'où $1 + \ell = \ell^2$ et $\ell \geq 0$. Finalement, on obtient $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.



I. Suites récurrentes

4. Convergence et point fixe

Exemple 4 :

Revenons à l' exemple (1) .

■ La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est bien continue sur $[0; 8]$.

■ Par conséquent, la limite ℓ de la suite vérifie $\sqrt{1+\ell} = \ell$.

D'où $1 + \ell = \ell^2$ et $\ell \geq 0$. Finalement, on obtient $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

■ Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.



I. Suites récurrentes

4. Convergence et point fixe

Remarques : Dans le cas d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie à partir d'une fonction décroissante où les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent :

- Celles-ci convergent vers des points fixes de $g = f \circ f$. Lors de la recherche de ces derniers il sera bon de remarquer que les points fixes de f sont aussi des points fixes de g . Cela aidera pour d'éventuelles factorisation. La réciproque est fautive : les points fixes de g ne sont pas nécessairement des points fixes de f .



I. Suites récurrentes

4. Convergence et point fixe

Remarques : Dans le cas d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie à partir d'une fonction décroissante où les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent :

- Celles-ci convergent vers des points fixes de $g = f \circ f$. Lors de la recherche de ces derniers il sera bon de remarquer que les points fixes de f sont aussi des points fixes de g . Cela aidera pour d'éventuelles factorisation. La réciproque est fautive : les points fixes de g ne sont pas nécessairement des points fixes de f .

Contre-Exemple 5 :

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ admet deux points fixes 1 et -1 mais $f \circ f$ n'admet que 1 comme point fixe.



I. Suites récurrentes

4. Convergence et point fixe

Remarques : Dans le cas d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie à partir d'une fonction décroissante où les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent :

- Celles-ci convergent vers des points fixes de $g = f \circ f$. Lors de la recherche de ces derniers il sera bon de remarquer que les points fixes de f sont aussi des points fixes de g . Cela aidera pour d'éventuelles factorisation. La réciproque est fautive : les points fixes de g ne sont pas nécessairement des points fixes de f .

Contre-Exemple 5 :

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ admet deux points fixes 1 et -1 mais $f \circ f$ n'admet que 1 comme point fixe.

- Si les deux sous suites convergent vers le même point fixe, la suite mère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y converge aussi. À défaut, si elles convergent vers deux points fixes différents, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.



I. Suites récurrentes

4. Convergence et point fixe

Définition 2 (Fonction contractante) :

Soient I une partie de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

On dit que f est **contractante sur I** si f est k -lipschitzienne sur I avec $0 < k < 1$.



I. Suites récurrentes

4. Convergence et point fixe

Définition 2 (Fonction contractante) :

Soient I une partie de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

On dit que f est **contractante sur I** si f est k -lipschitzienne sur I avec $0 < k < 1$.

En particulier, d'après l'inégalité des accroissements finis, si f est dérivable sur I et telle que $|f'| \leq k < 1$ sur I alors f y est contractante.



I. Suites récurrentes

4. Convergence et point fixe

Définition 2 (Fonction contractante) :

Soient I une partie de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

On dit que f est **contractante sur I** si f est k -lipschitzienne sur I avec $0 < k < 1$.

En particulier, d'après l'inégalité des accroissements finis, si f est dérivable sur I et telle que $|f'| \leq k < 1$ sur I alors f y est contractante.

Théorème 5 (Théorème du point fixe) :

(Hors-Programme)

Soit f une application contractante sur un **segment** I stable par f .

Alors, toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur I par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l'unique point fixe ℓ de f .

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|. \quad (1)$$



I. Suites récurrentes

4. Convergence et point fixe

Théorème 5 (Théorème du point fixe) :

(Hors-Programme)

Soit f une application contractante sur un **segment** I stable par f .

Alors, toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur I par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l'unique point fixe ℓ de f .

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|. \quad (1)$$

Ce théorème donne, de plus, un algorithme de calcul du point fixe, appelé « méthode des approximations successives », contrairement à d'autres théorèmes de points fixes qui nous assurent seulement de l'existence de points fixes sans indiquer comment les déterminer.



I. Suites récurrentes

4. Convergence et point fixe

Théorème 5 (Théorème du point fixe) :

(Hors-Programme)

Soit f une application contractante sur un **segment** I stable par f .

Alors, toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur I par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l'unique point fixe ℓ de f .

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|. \quad (1)$$

Ce théorème donne, de plus, un algorithme de calcul du point fixe, appelé « méthode des approximations successives », contrairement à d'autres théorèmes de points fixes qui nous assurent seulement de l'existence de points fixes sans indiquer comment les déterminer.

De plus, l'énoncé donne un majorant de l'erreur sous la forme de (1).



I. Suites récurrentes

4. Convergence et point fixe

Théorème 5 (Théorème du point fixe) :

(Hors-Programme)

Soit f une application contractante sur un **segment** I stable par f .

Alors, toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur I par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l'unique point fixe ℓ de f .

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|. \quad (1)$$

Ce théorème donne, de plus, un algorithme de calcul du point fixe, appelé « méthode des approximations successives », contrairement à d'autres théorèmes de points fixes qui nous assurent seulement de l'existence de points fixes sans indiquer comment les déterminer.

De plus, l'énoncé donne un majorant de l'erreur sous la forme de (1).

Calcul approché du point fixe : Le terme u_n constitue une estimation du point fixe ℓ de f avec une précision au moins égale à $k^n |u_0 - \ell|$. La méthode sera d'autant plus efficace que l'on aura bien choisi u_0 .



I. Suites récurrentes

4. Convergence et point fixe

ATTENTION

Bien remarquer que la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est

① une hypothèse dans la proposition (4) .



I. Suites récurrentes

4. Convergence et point fixe

ATTENTION

Bien remarquer que la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est

- 1 une **hypothèse** dans la proposition (4) .
- 2 une **conclusion** dans le théorème (5).



I. Suites récurrentes

4. Convergence et point fixe

Exercice 2 :

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{5 + 2u_n} \end{cases} .$$



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

Lorsque l'énoncé de l'exercice ou du problème ne pose pas de questions intermédiaires, voilà un petit rappel des points essentiels de ce qu'il faut faire pour étudier une suite récurrente d'ordre 1.

Soient $f : \mathcal{D}_f \mapsto \mathbb{R}$, $J \subset \mathcal{D}_f$ un intervalle et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par la relation

$$\begin{cases} u_0 \in J \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- 1 La première chose à vérifier est que la fonction f est continue sur J ou, au moins sur un sous-intervalle I qui vérifiera un maximum des propriétés listées ci-dessous :



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

Lorsque l'énoncé de l'exercice ou du problème ne pose pas de questions intermédiaires, voilà un petit rappel des points essentiels de ce qu'il faut faire pour étudier une suite récurrente d'ordre 1.

Soient $f : \mathcal{D}_f \mapsto \mathbb{R}$, $J \subset \mathcal{D}_f$ un intervalle et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par la relation

$$\begin{cases} u_0 \in J \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- 1 La première chose à vérifier est que la fonction f est continue sur J ou, au moins sur un sous-intervalle I qui vérifiera un maximum des propriétés listées ci-dessous :

ATTENTION

- Si f n'est pas continue, alors tout ce qui va suivre ne s'applique pas.



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

Lorsque l'énoncé de l'exercice ou du problème ne pose pas de questions intermédiaires, voilà un petit rappel des points essentiels de ce qu'il faut faire pour étudier une suite récurrente d'ordre 1.

Soient $f : \mathcal{D}_f \mapsto \mathbb{R}$, $J \subset \mathcal{D}_f$ un intervalle et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par la relation

$$\begin{cases} u_0 \in J \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- ❶ La première chose à vérifier est que la fonction f est continue sur J ou, au moins sur un sous-intervalle I qui vérifiera un maximum des propriétés listées ci-dessous :

ATTENTION

- Si f n'est pas continue, alors tout ce qui va suivre ne s'applique pas.
- S'il n'existe pas d'intervalles bornés stables, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge. La réciproque est fausse.



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

Lorsque l'énoncé de l'exercice ou du problème ne pose pas de questions intermédiaires, voilà un petit rappel des points essentiels de ce qu'il faut faire pour étudier une suite récurrente d'ordre 1.

Soient $f : \mathcal{D}_f \mapsto \mathbb{R}$, $J \subset \mathcal{D}_f$ un intervalle et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par la relation

$$\begin{cases} u_0 \in J \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- ❶ La première chose à vérifier est que la fonction f est continue sur J ou, au moins sur un sous-intervalle I qui vérifiera un maximum des propriétés listées ci-dessous :

ATTENTION

- Si f n'est pas continue, alors tout ce qui va suivre ne s'applique pas.
- S'il n'existe pas d'intervalles bornés stables, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge. La réciproque est fausse.

- ❶ I est stable par f et contient au moins un terme de la suite à partir d'un certain rang. C'est la **proposition (1)** .



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

Lorsque l'énoncé de l'exercice ou du problème ne pose pas de questions intermédiaires, voilà un petit rappel des points essentiels de ce qu'il faut faire pour étudier une suite récurrente d'ordre 1.

Soient $f : \mathcal{D}_f \mapsto \mathbb{R}$, $J \subset \mathcal{D}_f$ un intervalle et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par la relation

$$\begin{cases} u_0 \in J \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- 1 La première chose à vérifier est que la fonction f est continue sur J ou, au moins sur un sous-intervalle I qui vérifiera un maximum des propriétés listées ci-dessous :

ATTENTION

- Si f n'est pas continue, alors tout ce qui va suivre ne s'applique pas.
- S'il n'existe pas d'intervalles bornés stables, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge. La réciproque est fausse.

- 1 I est stable par f et contient au moins un terme de la suite à partir d'un certain rang. C'est la **proposition (1)**.
- 2 I est un segment $[a; b]$ *i.e.* fermé (pour retenir les limites) et borné (pour pouvoir y appliquer les théorèmes de convergence monotone). À défaut, on devra parfois se contenter d'un intervalle semi-borné et/ou semi-fermé sur lequel on essaiera d'adapter ce qui suit.



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

- ② Pour étudier la monotonie de la suite, on étudiera celle de f sur I ainsi que le signe de $\delta(x) = f(x) - x$, en espérant qu'il y soit constant. C'est la **proposition (2)** .



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

- ② Pour étudier la monotonie de la suite, on étudiera celle de f sur I ainsi que le signe de $\delta(x) = f(x) - x$, en espérant qu'il y soit constant. C'est la **proposition (2)** .

On récupèrera les éventuels points fixes au passage.



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

- ② Pour étudier la monotonie de la suite, on étudiera celle de f sur I ainsi que le signe de $\delta(x) = f(x) - x$, en espérant qu'il y soit constant. C'est la **proposition (2)**.

On récupèrera les éventuels points fixes au passage.

Remarque : Le signe de δ dépend de la position de la courbe représentative de f par rapport à la première bissectrice.



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

- ② Pour étudier la monotonie de la suite, on étudiera celle de f sur I ainsi que le signe de $\delta(x) = f(x) - x$, en espérant qu'il y soit constant. C'est la **proposition (2)**.

On récupèrera les éventuels points fixes au passage.

Remarque : Le signe de δ dépend de la position de la courbe représentative de f par rapport à la première bissectrice.

- ③ I doit nécessairement contenir un ou des points fixes de f . C'est le contenu de la **proposition (4)** et du **théorème (5)**.
S'il n'en contient pas $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge. Il restera à déterminer le type de divergence : un théorème de comparaison ou l'extraction de deux sous-suites divergeant/convergeant vers des limites différentes suffisent souvent à conclure.



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

Si f possède des points fixes dans I , plusieurs cas se présentent alors :



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

Si f possède des points fixes dans I , plusieurs cas se présentent alors :

- ④ ① Le cas le plus facile : c'est celui où f est contractante sur I ce que l'on aura prouvé généralement à l'aide de l'inégalité des accroissements finis dans le cas d'une fonction dérivable et telle que $|f'|$ soit majorée par une constante strictement inférieure à 1 sur I .



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

Si f possède des points fixes dans I , plusieurs cas se présentent alors :

- ④ ① Le cas le plus facile : c'est celui où f est contractante sur I ce que l'on aura prouvé généralement à l'aide de l'inégalité des accroissements finis dans le cas d'une fonction dérivable et telle que $|f'|$ soit majorée par une constante strictement inférieure à 1 sur I .

Dans ce cas il y a un unique point fixe $\alpha \in I$, vers lequel la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On ne peut pas appliquer le **théorème (5)** directement car il n'est pas au programme mais on pourra mener la même démonstration.



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

Si f possède des points fixes dans I , plusieurs cas se présentent alors :

- ④ ① Le cas le plus facile : c'est celui où f est contractante sur I ce que l'on aura prouvé généralement à l'aide de l'inégalité des accroissements finis dans le cas d'une fonction dérivable et telle que $|f'|$ soit majorée par une constante strictement inférieure à 1 sur I .

Dans ce cas il y a un unique point fixe $\alpha \in I$, vers lequel la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On ne peut pas appliquer le **théorème (5)** directement car il n'est pas au programme mais on pourra mener la même démonstration.

ATTENTION

- La fonction f n'est pas nécessairement croissante !



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

Si f possède des points fixes dans I , plusieurs cas se présentent alors :

- ④ ① Le cas le plus facile : c'est celui où f est contractante sur I ce que l'on aura prouvé généralement à l'aide de l'inégalité des accroissements finis dans le cas d'une fonction dérivable et telle que $|f'|$ soit majorée par une constante strictement inférieure à 1 sur I .

Dans ce cas il y a un unique point fixe $\alpha \in I$, vers lequel la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On ne peut pas appliquer le **théorème (5)** directement car il n'est pas au programme mais on pourra mener la même démonstration.

ATTENTION

- La fonction f n'est pas nécessairement croissante !
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement monotone !



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

Si f possède des points fixes dans I , plusieurs cas se présentent alors :

- ④ ① Le cas le plus facile : c'est celui où f est contractante sur I ce que l'on aura prouvé généralement à l'aide de l'inégalité des accroissements finis dans le cas d'une fonction dérivable et telle que $|f'|$ soit majorée par une constante strictement inférieure à 1 sur I .

Dans ce cas il y a un unique point fixe $\alpha \in I$, vers lequel la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On ne peut pas appliquer le **théorème (5)** directement car il n'est pas au programme mais on pourra mener la même démonstration.

ATTENTION

- La fonction f n'est pas nécessairement croissante !
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement monotone !

- ② Le deuxième cas le plus facile : c'est celui où f est croissante.



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

Si f possède des points fixes dans I , plusieurs cas se présentent alors :

- ④ ① Le cas le plus facile : c'est celui où f est contractante sur I ce que l'on aura prouvé généralement à l'aide de l'inégalité des accroissements finis dans le cas d'une fonction dérivable et telle que $|f'|$ soit majorée par une constante strictement inférieure à 1 sur I .

Dans ce cas il y a un unique point fixe $\alpha \in I$, vers lequel la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On ne peut pas appliquer le **théorème (5)** directement car il n'est pas au programme mais on pourra mener la même démonstration.

ATTENTION

- La fonction f n'est pas nécessairement croissante !
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement monotone !

- ② Le deuxième cas le plus facile : c'est celui où f est croissante. Dans ce cas la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, et comme elle est bornée elle converge. Il restera à trouver vers lequel, souvent par un argument de monotonie partant de u_0 .



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

Si f possède des points fixes dans I , plusieurs cas se présentent alors :

- ④ ① Le cas le plus facile : c'est celui où f est contractante sur I ce que l'on aura prouvé généralement à l'aide de l'inégalité des accroissements finis dans le cas d'une fonction dérivable et telle que $|f'|$ soit majorée par une constante strictement inférieure à 1 sur I .

Dans ce cas il y a un unique point fixe $\alpha \in I$, vers lequel la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On ne peut pas appliquer le **théorème (5)** directement car il n'est pas au programme mais on pourra mener la même démonstration.

ATTENTION

- La fonction f n'est pas nécessairement croissante !
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement monotone !

- ② Le deuxième cas le plus facile : c'est celui où f est croissante. Dans ce cas la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, et comme elle est bornée elle converge. Il restera à trouver vers lequel, souvent par un argument de monotonie partant de u_0 .

ATTENTION

- La fonction f n'est pas nécessairement contractante !



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

Si f possède des points fixes dans I , plusieurs cas se présentent alors :

- ④ ① Le cas le plus facile : c'est celui où f est contractante sur I ce que l'on aura prouvé généralement à l'aide de l'inégalité des accroissements finis dans le cas d'une fonction dérivable et telle que $|f'|$ soit majorée par une constante strictement inférieure à 1 sur I .
Dans ce cas il y a un unique point fixe $\alpha \in I$, vers lequel la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On ne peut pas appliquer le **théorème (5)** directement car il n'est pas au programme mais on pourra mener la même démonstration.

ATTENTION

- La fonction f n'est pas nécessairement croissante !
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement monotone !

- ② Le deuxième cas le plus facile : c'est celui où f est croissante.
Dans ce cas la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, et comme elle est bornée elle converge. Il restera à trouver vers lequel, souvent par un argument de monotonie partant de u_0 .

ATTENTION

- La fonction f n'est pas nécessairement contractante !
- La fonction f peut avoir plusieurs points fixes !



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

Si f possède des points fixes dans I , plusieurs cas se présentent alors :

- ④ ① Le cas le plus facile : c'est celui où f est contractante sur I ce que l'on aura prouvé généralement à l'aide de l'inégalité des accroissements finis dans le cas d'une fonction dérivable et telle que $|f'|$ soit majorée par une constante strictement inférieure à 1 sur I .
Dans ce cas il y a un unique point fixe $\alpha \in I$, vers lequel la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On ne peut pas appliquer le **théorème (5)** directement car il n'est pas au programme mais on pourra mener la même démonstration.

ATTENTION

- La fonction f n'est pas nécessairement croissante !
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement monotone !

- ② Le deuxième cas le plus facile : c'est celui où f est croissante.
Dans ce cas la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, et comme elle est bornée elle converge. Il restera à trouver vers lequel, souvent par un argument de monotonie partant de u_0 .

ATTENTION

- La fonction f n'est pas nécessairement contractante !
- La fonction f peut avoir plusieurs points fixes !
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement croissante !



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

Si f possède des points fixes dans I , plusieurs cas se présentent alors :

- ④ ① Le cas le plus facile : c'est celui où f est contractante sur I ce que l'on aura prouvé généralement à l'aide de l'inégalité des accroissements finis dans le cas d'une fonction dérivable et telle que $|f'|$ soit majorée par une constante strictement inférieure à 1 sur I .

Dans ce cas il y a un unique point fixe $\alpha \in I$, vers lequel la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On ne peut pas appliquer le **théorème (5)** directement car il n'est pas au programme mais on pourra mener la même démonstration.

ATTENTION

- La fonction f n'est pas nécessairement croissante !
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement monotone !

- ② Le deuxième cas le plus facile : c'est celui où f est croissante. Dans ce cas la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, et comme elle est bornée elle converge. Il restera à trouver vers lequel, souvent par un argument de monotonie partant de u_0 .

ATTENTION

- La fonction f n'est pas nécessairement contractante !
- La fonction f peut avoir plusieurs points fixes !
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement croissante !

Exemples : $f(x) = x^2$ n'est pas contractante sur $[0; 1]$, elle a plusieurs points fixes (deux), et les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ sont décroissantes.



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

- ④ ⑧ Un autre cas « gérable » est celui où f est décroissante même si cela se passe en général moins bien. La plupart du temps, on sera dans le cas 4.1.



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

- ④ ⑧ Un autre cas « gérable » est celui où f est décroissante même si cela se passe en général moins bien. La plupart du temps, on sera dans le cas 4.1.

ATTENTION

- f n'est pas nécessairement contractante !



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

- ④ ③ Un autre cas « gérable » est celui où f est décroissante même si cela se passe en général moins bien. La plupart du temps, on sera dans le cas 4.1.

ATTENTION

- f n'est pas nécessairement contractante !
- f peut avoir plusieurs points fixes !



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

- ④ ⑧ Un autre cas « gérable » est celui où f est décroissante même si cela se passe en général moins bien. La plupart du temps, on sera dans le cas 4.1.

ATTENTION

- f n'est pas nécessairement contractante !
- f peut avoir plusieurs points fixes !

Dans le cas contraire, les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones, l'une croissante et l'autre décroissante. Comme elles sont bornées elles convergent toutes les deux, mais pas nécessairement vers la même limite qui sera nécessairement un point fixe de $f \circ f$.



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

- ④ ③ Un autre cas « gérable » est celui où f est décroissante même si cela se passe en général moins bien. La plupart du temps, on sera dans le cas 4.1.

ATTENTION

- f n'est pas nécessairement contractante !
- f peut avoir plusieurs points fixes !

Dans le cas contraire, les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones, l'une croissante et l'autre décroissante. Comme elles sont bornées elles convergent toutes les deux, mais pas nécessairement vers la même limite qui sera nécessairement un point fixe de $f \circ f$.

- Si le point fixe est unique, les deux suites convergent vers lui ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

- ④ ⑧ Un autre cas « gérable » est celui où f est décroissante même si cela se passe en général moins bien. La plupart du temps, on sera dans le cas 4.1.

ATTENTION

- f n'est pas nécessairement contractante !
- f peut avoir plusieurs points fixes !

Dans le cas contraire, les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones, l'une croissante et l'autre décroissante. Comme elles sont bornées elles convergent toutes les deux, mais pas nécessairement vers la même limite qui sera nécessairement un point fixe de $f \circ f$.

- Si le point fixe est unique, les deux suites convergent vers lui ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- S'ils sont pluriels, tout dépendra de si les sous-suites convergent vers le même ou pas.



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

- ④ ⑧ Un autre cas « gérable » est celui où f est décroissante même si cela se passe en général moins bien. La plupart du temps, on sera dans le cas 4.1.

ATTENTION

- f n'est pas nécessairement contractante !
- f peut avoir plusieurs points fixes !

Dans le cas contraire, les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones, l'une croissante et l'autre décroissante. Comme elles sont bornées elles convergent toutes les deux, mais pas nécessairement vers la même limite qui sera nécessairement un point fixe de $f \circ f$.

- Si le point fixe est unique, les deux suites convergent vers lui ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- S'ils sont pluriels, tout dépendra de si les sous-suites convergent vers le même ou pas.

En général, vous rencontrerez deux cas de figure :



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

- ④ ⑧ Un autre cas « gérable » est celui où f est décroissante même si cela se passe en général moins bien. La plupart du temps, on sera dans le cas 4.1.

ATTENTION

- f n'est pas nécessairement contractante !
- f peut avoir plusieurs points fixes !

Dans le cas contraire, les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones, l'une croissante et l'autre décroissante. Comme elles sont bornées elles convergent toutes les deux, mais pas nécessairement vers la même limite qui sera nécessairement un point fixe de $f \circ f$.

- Si le point fixe est unique, les deux suites convergent vers lui ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- S'ils sont pluriels, tout dépendra de si les sous-suites convergent vers le même ou pas.

En général, vous rencontrerez deux cas de figure :

- les sous-suites sont adjacentes donc convergentes (vers le même point fixe) ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

- ④ ⑧ Un autre cas « gérable » est celui où f est décroissante même si cela se passe en général moins bien. La plupart du temps, on sera dans le cas 4.1.

ATTENTION

- f n'est pas nécessairement contractante !
- f peut avoir plusieurs points fixes !

Dans le cas contraire, les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones, l'une croissante et l'autre décroissante. Comme elles sont bornées elles convergent toutes les deux, mais pas nécessairement vers la même limite qui sera nécessairement un point fixe de $f \circ f$.

- Si le point fixe est unique, les deux suites convergent vers lui ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- S'ils sont pluriels, tout dépendra de si les sous-suites convergent vers le même ou pas.

En général, vous rencontrerez deux cas de figure :

- les sous-suites sont adjacentes donc convergentes (vers le même point fixe) ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- les sous-suites convergent vers deux points fixes différents : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

- ④ ④ Dernier cas : on n'est dans aucun des cas précédents. Alors il faut réfléchir un peu ... faire preuve de jugeotte et d'initiatives ... Étudier le signe de $f(x) - x$, ...L'énoncé vous aidera!



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

Exercice 3 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = a \in [0; 1] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

- ① Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0.



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

Exercice 3 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = a \in [0; 1] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

- 1 Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0.
- 2 Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

Exercice 3 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = a \in [0; 1] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

- 1 Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0.
- 2 Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
- 3 Montrer que la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est 0 .



I. Suites récurrentes

5. Plan d'étude des suites récurrentes d'ordre 1

Exercice 3 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = a \in [0; 1] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

- 1 Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0.
- 2 Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
- 3 Montrer que la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est 0 .
- 4 Supposons maintenant $a < 0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ?



II. Suites récurrentes linéaires

1 Suites récurrentes

2 Suites récurrentes linéaires

- Cas complexe : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
- Cas réel : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$



II. Suites récurrentes linéaires

En mathématiques, on appelle suite récurrente linéaire d'ordre p toute suite à valeurs dans un corps commutatif \mathbb{K} (par exemple \mathbb{R} ou \mathbb{C}) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par une relation de récurrence linéaire de la forme :

$$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_1u_{n+1} + a_0u_n,$$

où a_0, a_1, \dots, a_{p-1} sont p scalaires fixés de \mathbb{K} , a_0 non nul).

Une telle suite est entièrement déterminée par la donnée de ses p premiers termes et par la relation de récurrence.



II. Suites récurrentes linéaires

En mathématiques, on appelle suite récurrente linéaire d'ordre p toute suite à valeurs dans un corps commutatif \mathbb{K} (par exemple \mathbb{R} ou \mathbb{C}) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par une relation de récurrence linéaire de la forme :

$$\forall n \geq n_0 \quad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_1u_{n+1} + a_0u_n,$$

où a_0, a_1, \dots, a_{p-1} sont p scalaires fixés de \mathbb{K} , a_0 non nul).

Une telle suite est entièrement déterminée par la donnée de ses p premiers termes et par la relation de récurrence.

Les suites récurrentes linéaires d'ordre 1 sont les suites géométriques.



II. Suites récurrentes linéaires

Exemple 6 :

Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence linéaire d'ordre p :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \dots + a_{p-1} u_{n+p-1}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

La relation de récurrence sur $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se résume alors à une relation de récurrence d'ordre 1 sous la forme $U_{n+1} = AU_n$ mais dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Le terme général de la suite U_n est alors déterminé par $U_n = A^n U_0$. Le problème semble alors terminé.

II. Suites récurrentes linéaires

Exemple 6 :

Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence linéaire d'ordre p :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \dots + a_{p-1} u_{n+p-1}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

La relation de récurrence sur $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se résume alors à une relation de récurrence d'ordre 1 sous la forme $U_{n+1} = AU_n$ mais dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Le terme général de la suite U_n est alors déterminé par $U_n = A^n U_0$. Le problème semble alors terminé. Mais la réelle difficulté consiste alors à calculer A^n

II. Suites récurrentes linéaires

Exemple 6 :

Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence linéaire d'ordre p :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \dots + a_{p-1} u_{n+p-1}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

La relation de récurrence sur $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se résume alors à une relation de récurrence d'ordre 1 sous la forme $U_{n+1} = AU_n$ mais dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Le terme général de la suite U_n est alors déterminé par $U_n = A^n U_0$. Le problème semble alors terminé. Mais la réelle difficulté consiste alors à calculer $A^n \dots$.

Vous étudierez ces suites, liées à la réduction des endomorphismes, plus en détail l'année prochaine.

II. Suites récurrentes linéaires

Définition 2 (Suite récurrente linéaire d'ordre 2) :

On appelle **récurrente linéaire d'ordre 2** toute suite définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \text{ avec } (a; b) \in \mathbb{K}^2. \quad (2)$$



II. Suites récurrentes linéaires

Définition 2 (Suite récurrente linéaire d'ordre 2) :

On appelle **récurrente linéaire d'ordre 2** toute suite définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \text{ avec } (a; b) \in \mathbb{K}^2. \quad (2)$$

Remarque : Si $b = 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison a . Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 1.



II. Suites récurrentes linéaires

Définition 2 (Suite récurrente linéaire d'ordre 2) :

On appelle **récurrente linéaire d'ordre 2** toute suite définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \text{ avec } (a; b) \in \mathbb{K}^2. \quad (2)$$

Remarque : Si $b = 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison a . Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 1.

Définition 3 (Équation caractéristique) :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par (2).

On appelle **équation caractéristique** associée à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'équation

$$x^2 - ax - b = 0.$$



II. Suites récurrentes linéaires

1. Cas complexe : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Théorème 6 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{C}^N vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

avec $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$ et soit Δ le discriminant de son équation caractéristique.

- ① Si $\Delta \neq 0$ et r_1, r_2 sont les deux racines distinctes de l'équation caractéristique, alors

$$\exists ! (\lambda; \mu) \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$



II. Suites récurrentes linéaires

1. Cas complexe : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Théorème 6 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{C}^N vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

avec $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$ et soit Δ le discriminant de son équation caractéristique.

- ❶ Si $\Delta \neq 0$ et r_1, r_2 sont les deux racines distinctes de l'équation caractéristique, alors

$$\exists ! (\lambda; \mu) \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

- ❷ Si $\Delta = 0$ et r est la racine double de l'équation caractéristique, alors

$$\exists ! (\lambda; \mu) \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n)r^n.$$



II. Suites récurrentes linéaires

1. Cas complexe : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Théorème 6 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{C}^N vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

avec $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$ et soit Δ le discriminant de son équation caractéristique.

- ❶ Si $\Delta \neq 0$ et r_1, r_2 sont les deux racines distinctes de l'équation caractéristique, alors

$$\exists ! (\lambda; \mu) \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

- ❷ Si $\Delta = 0$ et r est la racine double de l'équation caractéristique, alors

$$\exists ! (\lambda; \mu) \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n)r^n.$$

Remarque : L'hypothèse $b \neq 0$ assure qu'il s'agit bien d'une relation de récurrence d'ordre 2. En particulier, 0 n'est pas solution de l'équation caractéristique.



II. Suites récurrentes linéaires

2. Cas réel : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

On suppose ici que $(a; b) \in \mathbb{R}^2$. On cherche une suite à valeurs réelles.

Théorème 1 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{R}^N vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ et soit Δ le discriminant de son équation caractéristique.

- ① Si $\Delta > 0$ et r_1, r_2 sont les deux racines distinctes et réelles de l'équation caractéristique, alors

$$\exists ! (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

II. Suites récurrentes linéaires

2. Cas réel : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Théorème 1 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{R}^N vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ et soit Δ le discriminant de son équation caractéristique.

- ❶ Si $\Delta > 0$ et r_1, r_2 sont les deux racines distinctes et réelles de l'équation caractéristique, alors

$$\exists ! (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

- ❷ Si $\Delta = 0$ et r est la racine double de l'équation caractéristique, alors

$$\exists ! (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n)r^n.$$

II. Suites récurrentes linéaires

2. Cas réel : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Théorème 1 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{R}^N vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ et soit Δ le discriminant de son équation caractéristique.

- ❶ Si $\Delta > 0$ et r_1, r_2 sont les deux racines distinctes et réelles de l'équation caractéristique, alors

$$\exists ! (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

- ❷ Si $\Delta = 0$ et r est la racine double de l'équation caractéristique, alors

$$\exists ! (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n)r^n.$$

- ❸ Si $\Delta < 0$ et $re^{\pm i\omega}$ sont les deux racines complexes et conjuguées de l'équation caractéristique, alors

$$\exists ! (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(\lambda \cos(\omega n) + \mu \sin(\omega n) \right) r^n.$$

II. Suites récurrentes linéaires

2. Cas réel : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Exemple 1 (Suite de Fibonacci) :

Un exemple classique de suite récurrente linéaire, la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$



II. Suites récurrentes linéaires

2. Cas réel : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Exemple 7 (Suite de Fibonacci) :

Un exemple classique de suite récurrente linéaire, la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Cette suite a pour équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = 1 + 4 = 5$ et dont les racines sont :

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \psi = -\frac{1}{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$



II. Suites récurrentes linéaires

2. Cas réel : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Exemple 7 (Suite de Fibonacci) :

Un exemple classique de chez classique, la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Cette suite a pour équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = 1 + 4 = 5$ et dont les racines sont :

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \psi = -\frac{1}{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

On peut donc écrire $F_n = \lambda\phi^n + \mu\psi^n$ puis, avec les conditions initiales qui imposent

$$\lambda = -\mu = \frac{1}{\sqrt{5}} :$$

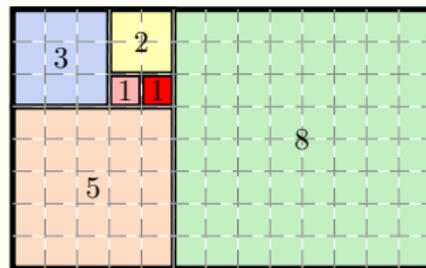
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \psi^n).$$



II. Suites récurrentes linéaires

2. Cas réel : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

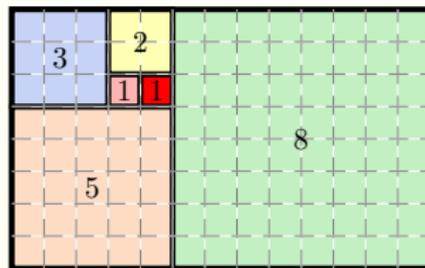
Possédant au départ un couple de lapins, combien de couples de lapins obtient-on en douze mois si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du second mois de son existence ?



II. Suites récurrentes linéaires

2. Cas réel : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Possédant au départ un couple de lapins, combien de couples de lapins obtient-on en douze mois si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du second mois de son existence ?



On est ainsi conduit à la célèbre séquence des nombres de Fibonacci :

1 1 2 3 5 8 13 ...



II. Suites récurrentes linéaires

2. Cas réel : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Exercice 4 :

Déterminer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sachant que
$$\begin{cases} u_0 = -1, u_1 = 0 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases} .$$

