Suites récurrentes

I/ Comportement asymptotique

Exercice 1 : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$.

1. Démontrer que pour tout naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 4$.
2. Prouver que la suite est strictement croissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 2 :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle (ou complexe) telle que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante telle que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 3 : Soit a un réel strictement positif.

On définit les deux suites :

$$\begin{cases} b_0 \text{ est arbitraire, élément de } \left]\sqrt{a}\,; +\infty\right[\\ a_n = \dfrac{a}{b_n} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} = \dfrac{1}{2}\left(b_n + \dfrac{a}{b_n}\right). \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant \sqrt{a} \leqslant b_n$
2. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
3. En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha = \sqrt{a}$.

Exercice 4 : Soient $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$. On considère les suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \qquad \text{et} \qquad \frac{2}{v_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}.$$

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant v_n$.

2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 5 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$.

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. On souhaite montrer que les suites $(w_n = u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n = u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes :
   (a) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$|w_{n+1} - t_{n+1}| \leqslant \frac{1}{4}\,|w_n - t_n|\,.$$
   (c) En déduire que les suites $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. Résoudre l'équation $x = \dfrac{1}{1+x}$ et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

II/ Suites récurrentes

Exercice 6 : Dans un repère, représenter les suites suivantes :

1. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 0{,}1 \\ u_{n+1} = 2u_n(1-u_n) \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} \end{cases}$

Exercice 7 : On considère la suite u définie par la récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + 2{u_n}^2 \quad \text{et} \quad u_0 \in \mathbb{R}_+^*$$

Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 8 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite vérifiant $u_0 = 9$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$.

On définit la fonction f par $f(x) = \sqrt{6+x}$ pour $x \geqslant 0$.

1. Montrer que $[3\,;+\infty[$ est stable par f. Qu'en déduit-on ? Donner les limites possibles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et conclure sur la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Calculer $\sup\limits_{[3;+\infty[} (f')$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n - 3 < \dfrac{1}{6^{n-1}}$.
4. Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 9 : Étude complète de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$.

Exercice 10 : Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > -1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

Exercice 11 : Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans chacun des cas suivants :

1. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n$.
2. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \cos(u_n)$.

Exercice 12 : Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$.

III/ Suites récurrentes linéaires

Exercice 13 : Dans chacun des cas suivants, calculer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sachant que :

1. $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = -2u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n + 2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n + 12n \end{cases}$
5. $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 3 \\ u_n u_{n+2} = 2u_{n+1}^3 \end{cases}$

Exercice 14 : On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Justifier l'existence de deux suites réelles (α_n) et (β_n) telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{A}^n = \alpha_n \mathrm{A} + \beta_n \mathrm{A}^2.$$

Déterminer les réels α_n et β_n en fonction de n.

Exercice 15 (Suite de Fibonacci bis) : Soit $(\mathrm{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\mathrm{F}_0 = 0$, $\mathrm{F}_1 = 1$, et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n.$$

1. Calculer F_n pour tout entier n.
2. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{F}_{n+1}^2 - \mathrm{F}_n\mathrm{F}_{n+2} = (-1)^n$.
3. Montrer que la suite $\left(\dfrac{\mathrm{F}_{n+1}}{\mathrm{F}_n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge, et déterminer sa limite.
4. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{F}_k = \mathrm{F}_{2n}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \mathrm{F}_k = -\mathrm{F}_n$.