Suites récurrentes

I/ Comportement asymptotique

Exercice 1 : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$.

1. Démontrer que pour tout naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 4$.
2. Prouver que la suite est strictement croissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 2 :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle (ou complexe) telle que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante telle que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 3 : Soit a un réel strictement positif.

Un peu d'histoire : *Les babyloniens (2000 avant J-C) ont, semble-t-il, utilisé comme approximation de $\sqrt{a}$ la quantité $\frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right)$ où b est un nombre arbitraire, en pratique proche de $\sqrt{a}$, par exemple sa partie entière. Le procédé peut être itéré.*

On définit les deux suites :

$$\begin{cases} b_0 \text{ est arbitraire, élément de }]\sqrt{a}\,;+\infty[\\ a_n = \dfrac{a}{b_n} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} = \dfrac{1}{2}\left(b_n + \dfrac{a}{b_n}\right). \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant \sqrt{a} \leqslant b_n$
2. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
3. En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha = \sqrt{a}$.

Correction :

1. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on a $b_0 \geqslant \sqrt{a}$ par définition puis $a_0 = \dfrac{a}{b_0} \leqslant \dfrac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$. La propriété est initialisée.

   Pour l'hérédité rapidement, en supposant qu'il existe un rang n tel que $a_n \leqslant \sqrt{a} \leqslant b_n$, on remarque d'abord que $b_n > 0$ puis

   $$b_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(b_n - \sqrt{a})^2}{2b_n} \geqslant 0. \tag{XVIII.1}$$

   D'où, $b_{n+1} \geqslant \sqrt{a}$ et $a_{n+1} = \dfrac{a}{b_{n+1}} \leqslant \dfrac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$.

   L'encadrement est donc vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. (a) $b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} - b_n = \dfrac{a_n - b_n}{2} \leqslant 0$. Donc $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Minorée par $\sqrt{a}$, elle converge vers un réel $\beta \geqslant \sqrt{a}$. Remarquons que β est strictement positif.

   (b) $a_{n+1} - a_n = \dfrac{a}{b_{n+1}} - \dfrac{a}{b_n} \geqslant 0$. Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Majorée par $\sqrt{a}$, elle converge vers un réel $\alpha \leqslant \sqrt{a}$.

3. Il en résulte que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite α et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers une limite β.

   En passant à la limite dans les relations définissant $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient :

   $$\alpha = \frac{a}{\beta} \qquad \text{et} \qquad \alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} \iff \alpha = \beta.$$

   D'où $\beta^2 = a$ avec $\beta > 0$ $\alpha = \beta = \sqrt{a}$.

Prenons l'exemple de $a = 2$, en partant de $b_0 = 2$.

On obtient successivement :

$$\begin{array}{rcccccc} a_n & = & 1 & 1.333333333 & 1.411764706 & 1.414211438 & 1.414213562 \\ b_n & = & 2 & 1.500000000 & 1.416666667 & 1.414215686 & 1.414213562 \end{array}$$

```python
def heron(a,p):
    u = 2 # premier terme quelconque strictement plus grand que sqrt(a)
    delta = 1
    n = 0
    while delta >= 10**(-p):
        prec = u
        u = 0.5 * (u + a/u)
        delta = abs(prec - u)
        n += 1

    return u,n
```

La convergence est très rapide. Le nombre de décimales exactes croît exponentiellement avec n :

À partir de (XVIII.1), on a facilement, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - \sqrt{a} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}\left(b_n - \sqrt{a}\right)^2$, ce qui signifie que d'un terme à l'autre, le nombre de décimales correctes double. On dit que la convergence est *quadratique*.

Exercice 4 : Soient $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$. On considère les suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \qquad \text{et} \qquad \frac{2}{v_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}.$$

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant v_n$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Correction : Par récurrence immédiate, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $v_n > 0$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} - \dfrac{2u_nv_n}{u_n + v_n} = \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \geqslant 0$. d'où $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant v_n$.

Par conséquent :

— $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2} \leqslant 0$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît.

— $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \dfrac{2u_nv_n}{u_n + v_n} - v_n = \dfrac{(u_n - v_n)v_n}{u_n + v_n} \geqslant 0$: $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît.

On a donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $v_0 \leqslant v_n \leqslant u_n$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée, elle converge vers un réel a.

De même $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_0 \geqslant u_n \geqslant v_n$: la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante et majorée, elle converge vers un réel b.

On a $a = \dfrac{a+b}{2}$ et $b = \dfrac{2ab}{a+b}$ soit $a = b$.

On peut remarquer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_nv_n = u_0v_0$.

Par conséquent, en passant à la limite, $a^2 = u_0v_0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \sqrt{u_0v_0}$.

Exercice 5 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$.

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. On souhaite montrer que les suites $(w_n = u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n = u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes :

   (a) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$|w_{n+1} - t_{n+1}| \leqslant \frac{1}{4}|w_n - t_n|.$$

   (c) En déduire que les suites $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. Résoudre l'équation $x = \dfrac{1}{1+x}$ et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

II/ Suites récurrentes

Exercice 6 : Dans un repère, représenter les suites suivantes :

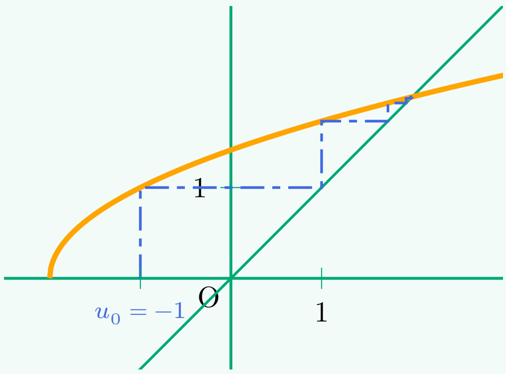
1. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_0 = 0{,}1 \\ u_{n+1} = 2u_n(1-u_n) \end{cases}$

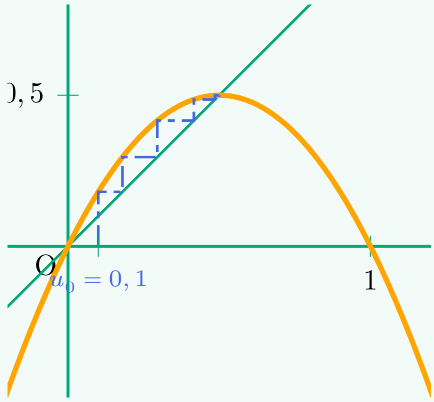
3. $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} \end{cases}$

Correction :

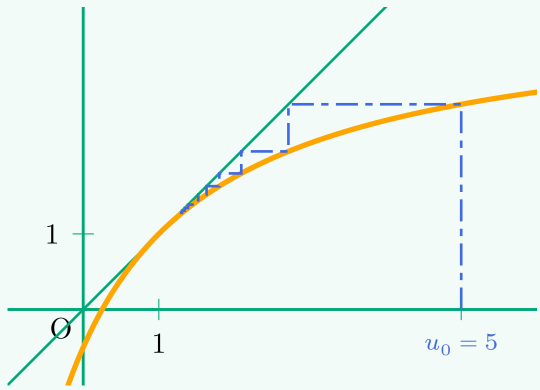
1.



2.



3.



Exercice 7 : On considère la suite u définie par la récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + 2{u_n}^2 \quad \text{et} \quad u_0 \in \mathbb{R}_+^*$$

Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Correction : La fonction associée $f : x \longmapsto x + 2x^2$ est croissante sur l'intervalle stable $\mathbb{R}_+^*$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie, monotone puis croissante.

Si elle était majorée, comme f est continue, elle convergerait vers un point fixe de f qui n'en a pas dans $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée et elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 8 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite vérifiant $u_0 = 9$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$.

On définit la fonction f par $f(x) = \sqrt{6+x}$ pour $x \geqslant 0$.

1. Montrer que $[3\,;+\infty[$ est stable par f. Qu'en déduit-on ? Donner les limites possibles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et conclure sur la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Calculer $\sup\limits_{[3;+\infty[}(f')$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n - 3 < \dfrac{1}{6^{n-1}}$.
4. Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Correction :

1. Par composition des fonctions usuelles, f est clairement croissante sur $[3\,;+\infty[$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc correctement définie.

   Comme f est continue sur $[3\,;+\infty[$, toute éventuelle convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se fera vers un des points fixes de f dans $[3\,;+\infty[$. En écartant -2, le seul possible est 3.
2. Par croissance de f, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Avec $u_1 = \sqrt{6+u_0} = \sqrt{15} < 9 = u_0$, elle est décroissante.

   Minorée par 3, elle converge.

   D'après la question précédente, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.
3. La fonction f est dérivable sur $]-6\,;+\infty[$ donc sur $[3\,;+\infty[$ où l'on a :

$$0 \leqslant f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{6+x}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6} \implies \forall\, x \in [3\,;+\infty[\,,\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{6}.$$

   Pour tout a, b de $[3\,;+\infty[$, f est continue sur $[a\,;b]$ et (au moins) dérivable sur $]a\,;b[$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a alors :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \frac{1}{6}\,|b-a|\,.$$

   En appliquant cette inégalité à $[3\,;u_{n-1}] \subset [3\,;+\infty[$, on obtient finalement :

$$|u_n - 3| \leqslant \frac{1}{6}\,|u_{n-1} - 3| \iff 0 < u_n - 3 \leqslant \frac{1}{6}\,(u_{n-1} - 3)\,.$$

   Une récurrence immédiate entraîne

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n - 3| \leqslant \frac{1}{6^n}\,|u_0 - 3| = \frac{1}{6^{n-1}}.$$

4. Comme $0 < \dfrac{1}{6} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{6^{n-1}} = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

   L'avantage à précédemment est que l'on peut, cette fois, gérer l'erreur commise en calculant u_n.

Exercice 9 : Étude complète de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$.

Correction : On pose donc $f : x \longmapsto 1 + \dfrac{1}{x}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$. Elle est donc strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;\infty[$.

Par ailleurs, $f(x) - x = \dfrac{1 + x - x^2}{x} = -\dfrac{(x - x_1)(x - x_2)}{x}$, où $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ sont les points fixes de f.

On résume tout cela dans un tableau de variations :

x	$-\infty$		x_1		0		$\frac{3}{2}$	x_2	2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	‖	$-$				$-$	
f	1	↘	x_1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{5}{3}$	x_2	$\frac{3}{2}$	↘	1
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	‖	$+$		0		$-$	

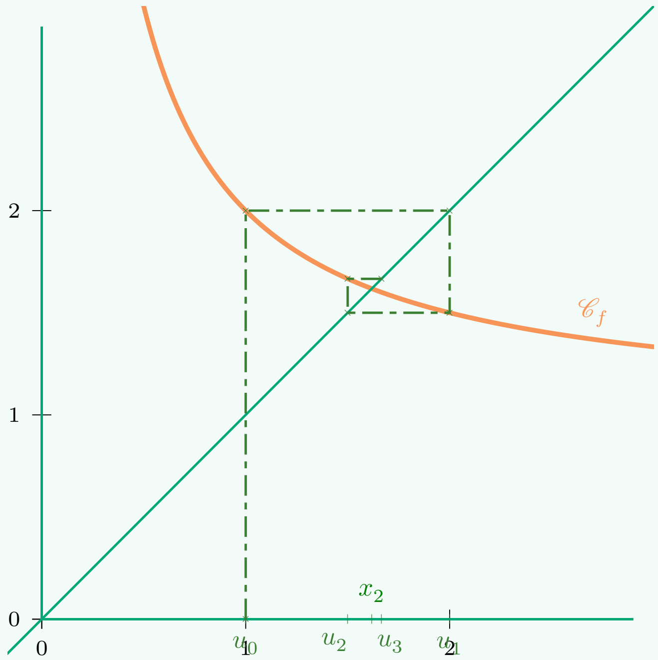


Figure XVIII.1 – Premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.

On constate que la suite semble converger vers x_2, reste à le prouver rigoureusement.

1. Commençons par chercher un intervalle stable intéressant pour l'étude de notre suite. L'intervalle naturel semble être $[1\,;2]$, les deux premiers termes de la suite étant respectivement égaux à 1 et 2, mais cela pose des problèmes ultérieurement pour la majoration de la dérivée, alors on prendra plutôt
$$\mathrm{I} = \left[\frac{3}{2}\,;2\right].$$
Bien sûr, u_0 n'appartient pas à cet intervalle mais ce n'est pas très gênant.

   Vérifions que I est stable par f :

   Sur I, f est décroissante et on a $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{3}$, $f(2) = \frac{3}{2}$ donc
$$f\left(\left[\frac{3}{2}\,;2\right]\right) = \left[\frac{3}{2}\,;\frac{5}{3}\right] \subset \mathrm{I}.$$
I est stable par f.
2. On démontre alors facilement par récurrence que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \mathrm{I}$. L'hérédité étant immédiatement induite par la stabilité de I par f.
3. De plus, sur notre intervalle I, on peut majorer la valeur absolue de la dérivée de f :
$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ |f'(x)| \leqslant \frac{4}{9} < 1.$$
4. On peut alors appliquer l'inégalité des accroissements finis en prenant $x = u_n$ et $y = x_2$ [1].

   On obtient :
$$|f(u_n) - f(x_2)| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - x_2| \iff |u_{n+1} - f(x_2)| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - x_2|.$$
5. Les dernières étapes sont alors toujours les mêmes :
   (a) On prouve par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - x_2| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} |u_1 - x_2|$.
   (b) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} = 0$ et $|u_1 - x_2|$ est borné, le théorème d'encadrement assure que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - x_2| = 0$ *i.e.*
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Remarquez bien que la fonction f était décroissante donc, sans l'inégalité des accroissements finis, nous aurions dû étudier les suites extraites d'indices pair et impair en espérant prouver qu'elles étaient adjacentes. L'inégalité des accroissements finis nous a donc épargné un fastidieux et incertain travail.

Exercice 10 : Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > -1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

Correction : Posons $f : x \longmapsto \ln(1+x)$ et $g : x \longmapsto f(x) - x$ définies sur $]-1\,;+\infty[$ et dérivables.

Une rapide étude de fonction, montre que :

$$g'(x) = -\frac{x}{1+x}.$$

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	0	$-$	
g	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

En particulier, $\forall\, x \in]-1\,;+\infty[$, $g(x) \leqslant 0$ et 0 est le seul point fixe de f.

1. Si $u_0 > 0$ comme $\forall\, x > 0$, $f(x) = \ln(1+x) > \ln(1) = 0$, l'intervalle $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$ est stable par f. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie et est strictement positive.

   Comme $\forall\, x \in \mathrm{I}$, $g(x) \leqslant 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc converge.

   Comme f est continue en 0, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers son point fixe 0.
2. Si $u_0 = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
3. Il reste donc à étudier le cas où $u_0 \in]-1\,;0[$.

   Montrons par l'absurde qu'il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} \leqslant -1$.

   En supposant le contraire, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n > -1$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc à valeurs dans $]-1\,;0[$ et strictement décroissante. Étant minorée par -1, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel $\ell \in [-1\,;0[$. Le cas $\ell = 0$ est exclu par stricte décroissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Il reste donc deux cas :
   - Soit $\ell \in]-1\,;0[$ et par continuité de f, la suite ne peut converger car f ne possède pas de point fixe dans cet intervalle d'où une contradiction.
   - Si $\ell = -1$alors il existe un rang N tel que $u_\mathrm{N} \leqslant -0,9$.

     Mais alors, $u_{\mathrm{N}+1} \leqslant \ln(-0,9+1) \simeq -2,3 < -1$ ce qui constitue de nouveau une contradiction.

   En conclusion, il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} \leqslant -1$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas définie à partir d'un certain rang.

En résumé,

1. si $u_0 \in]0\,;+\infty[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante, convergente vers 0,
2. si $u_0 = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante,
3. et si $u_0 \in]-1\,;0[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas définie à partir d'un certain rang.

Exercice 11 : Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans chacun des cas suivants :

1. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n$.
2. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \cos(u_n)$.

Correction :

1. (a) Pour tout choix de u_0, $u_1 \in [-1, 1]$. On supposera dorénavant que $u_0 \in [-1, 1]$.
   (b) Si $u_0 = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
   (c) Si $u_0 \in [-1\,;0[$, considérons la suite u' définie par $u'_0 = -u_0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u'_{n+1} = \sin(u'_n)$. La fonction $x \mapsto \sin x$ étant impaire, il est clair par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u'_n = -u_n$.

   On supposera dorénavant que $u_0 \in]0, 1]$.

   Puisque $]0, 1] \subset \left]0\,; \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin(]0, 1]) \subset]0, 1]$ et l'intervalle $\mathrm{I} =]0, 1]$ est stable par f.

   Ainsi, si $u_0 \in]0, 1]$, alors, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0, 1]$.

   Pour $x \in [0, 1]$, posons $g(x) = \sin x - x$. g est dérivable sur $[0, 1]$ et pour $x \in [0, 1]$, $g'(x) = \cos x - 1$. g' est strictement négative sur $]0, 1]$ et donc strictement décroissante sur $[0, 1]$. On en déduit que pour $x \in]0, 1]$, $g(x) < g(0) = 0$.

   Mais alors, pour n entier naturel donné, $u_{n+1} = \sin(u_n) < u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi strictement décroissante, minorée par 0 et donc converge vers $\ell \in [0, 1]$.

   La fonction $x \mapsto \sin x$ est continue sur $[0, 1]$ et donc, ℓ est un point fixe de f. L'étude de g montre que f a un et un seul point fixe dans $[0, 1]$ à savoir 0. La suite u est donc convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

   L'étude préliminaire montre la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 pour tout choix de u_0.
2. Si u_0 est un réel quelconque, $u_1 \in [-1, 1] \subset \left[-\dfrac{\pi}{2}\,; \dfrac{\pi}{2}\right]$ puis $u_2 \in [0, 1]$.

   On supposera dorénavant que $u_0 \in [0, 1]$.

   On a $\cos([0, 1]) = [\cos 1, \cos 0] = [0,504..., 1] \subset [0, 1]$. Donc, la fonction $x \mapsto \cos x$ laisse stable l'intervalle $\mathrm{I} = [0, 1]$.

   On en déduit que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0, 1]$.

   Pour $x \in [0, 1]$, on pose $g(x) = \cos x - x$. g est somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $[0, 1]$ et est donc strictement décroissante sur $[0, 1]$.

   De plus, g est continue sur $[0, 1]$ et vérifie $g(0) = \cos 0 > 0$ et $g(1) = \cos 1 - 1 < 0$.

   D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones g s'annule donc une et une seule fois sur $[0, 1]$ en un certain réel α.

   Ainsi, f admet sur $[0, 1]$ un unique point fixe, à savoir α. Puisque f est continue sur le segment $[0, 1]$, on sait que **si** la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est vers α.

   La fonction $f:\ x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $[0, 1]$ et pour $x \in [0, 1]$,

$$|f'(x)| = |-\sin x| \leqslant \sin(1) < 1.$$

L'inégalité des accroissements finis montre alors que

$$\forall\,(x,y)\in[0,1]^2,\ |\cos x-\cos y|\leqslant \sin(1)|x-y|.$$

Pour n entier naturel donné, on a alors

$$|u_{n+1}-\alpha|=|f(u_n)-f(\alpha)|\leqslant \sin(1)|u_n-\alpha|,$$

et donc, pour tout entier naturel n,

$$|u_n-\alpha|\leqslant \big(\sin(1)\big)^n|u_0-\alpha|\leqslant \big(\sin(1)\big)^n.$$

Comme $0\leqslant \sin 1<1$, la suite $(\sin 1)^n$ converge vers 0, et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Remarques :

— On peut noter que puisque la fonction $x\mapsto\cos x$ est strictement décroissante sur $[0,1]$, les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement monotones, de sens de variations contraires (dans le cas où $u_0\in[0,1]$).

— On peut noter également que si $n>\dfrac{\ln(10^{-2})}{\ln(\sin 1)}=26,6...$, alors $(\sin 1)^n<10^{-2}$. Par suite, u_{27} est une valeur approchée de α à 10^{-2} près. La machine fournit $\alpha\simeq= 0,73\ldots$ (et même facilement $\alpha\simeq 0,739087042\ldots$).

Exercice 12 : Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0\in\mathbb{R}$ et $\forall\,n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n^2-2u_n+2$.

Correction : Pour $x\in\mathbb{R}$,

$$x^2-2x+2=x\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow (x-1)(x-2)=0\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=2.$$

Donc, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, ce ne peut être que vers 1 ou 2.

Pour $n\in\mathbb{N}$,

$$u_{n+1}-u_n=(u_n^2-2u_n+2)-u_n=(u_n-1)(u_n-2) \qquad \text{(XVIII.2)}$$
$$u_{n+1}-1=u_n^2-2u_n+1=(u_n-1)^2 \qquad \text{(XVIII.3)}$$
$$u_{n+1}-2=u_n^2-2u_n=u_n(u_n-2). \qquad \text{(XVIII.4)}$$

1^{er} cas. Si $u_0=1$ ou $u_0=2$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

$2^{\text{ème}}$ cas. Si $u_0\ \in]1,2[$, (XVIII.3) et (XVIII.4) permettent de montrer par récurrence que $\forall\,n\in\mathbb{N},\ u_n\ \in]1,2[$.

(XVIII.2) montre alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Étant minorée par 1, elle converge vers un réel $\ell\in[1,u_0]\subset[1,2[$.

Dans ce cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Suites récurrentes

$3^{\text{ème}}$ cas. Si $u_0 \in]2, +\infty[$, (XVIII.4) permet de montrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n > 2$.

Mais alors, (XVIII.2) montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est vers un réel $\ell \in [u_0, +\infty[\subset]2, +\infty[$.

f n'ayant pas de point fixe dans cet intervalle, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant strictement croissante, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

$4^{\text{ème}}$ cas. Si $u_0 \in]0, 1[$, alors $u_1 = (u_0 - 1)^2 + 1 \in]1, 2[$ ce qui ramène au deuxième cas.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

$5^{\text{ème}}$ cas. Si $u_0 = 0$, alors $u_1 = 2$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang 1.

Dans ce cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.

$6^{\text{ème}}$ cas. Si $u_0 < 0$, alors $u_1 = u_n^2 - 2u_n + 2 > 2$, ce qui ramène au troisième cas.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

En résumé, si $u_0 \in]0, 2[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, si $u_0 \in \{0, 2\}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2 et si $u_0 \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

III/ Suites récurrentes linéaires

Exercice 13 : Dans chacun des cas suivants, calculer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sachant que :

1. $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = -2u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n + 2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n + 12n \end{cases}$
5. $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 3 \\ u_n u_{n+2} = 2u_{n+1}^3 \end{cases}$

Correction :

1. Cette suite est récurrente linéaire d'ordre 2.

   L'équation caractéristique E_c est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 1 et 2.

   D'après le cours, il existe k_1 et k_2 tels que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = k_1 1^n + k_2 2^n.$$

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ k_1 + 2k_2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = 1 \end{cases}.$$

   En conclusion,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n - 1.$$

Suites récurrentes

2. $\mathrm{E}_c : r^2 = -2r - 2$ a pour solution $-1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm \frac{3i\pi}{4}}$.

D'après le cours, il existe k_1 et k_2 tels que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\sqrt{2})^n \left(k_1 \cos \frac{3n\pi}{4} + k_2 \sin \frac{3n\pi}{4} \right).$$

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} k_1 = 1 \\ \sqrt{2}(k_1 \frac{-\sqrt{2}}{2} + k_2 \frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 2 \end{cases}.$$

En conclusion,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{3n\pi}{4} + 2 \sin \frac{3n\pi}{4} \right).$$

3. Cette suite n'est pas récurrente linéaire à cause du $+2$. On va donc appliquer une méthode proche de celle employées avec les équations différentielles :

— **Recherche d'une solution particulière (α_n).**

On cherche une solution particulière sous la forme d'une suite constante $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = \lambda$.

$$\begin{aligned} \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{n+2} = 5\alpha_{n+1} - 6\alpha_n + 2 &\iff \lambda = 5\lambda - 6\lambda + 2 \\ &\iff \lambda = 1 \end{aligned}$$

La suite (α_n) constante égale à 1 vérifie la relation :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{n+2} = 5\alpha_{n+1} - 6\alpha_n + 2$$

— **Recherche de la solution homogène *i.e.* la solution de** $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = 5v_{n+1} - 6v_n$ qui est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

$\mathrm{E}_c : r^2 = 5r - 6$ a pour solutions 2 et 3.

D'après le cours, il existe donc k_1 et k_2 tels que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = k_1 2^n + k_2 3^n.$$

— **Solution générale :**

$$\begin{aligned} \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n + 2 \\ &= 5u_{n+1} - 6u_n + \alpha_{n+2} - 5\alpha_{n+1} + 6\alpha_n \\ \iff \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - \alpha_{n+2} &= 5(u_{n+1} - \alpha_{n+1}) - 6(u_n - \alpha_n) \\ \iff \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (u-\alpha)_{n+2} &= 5(u-\alpha)_{n+1} - 6(u-\alpha)_n \\ \iff \exists k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (u-\alpha)_n &= k_1 2^n + k_2 3^n \\ \iff \exists k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n &= k_1 2^n + k_2 3^n + \alpha_n \\ \iff \exists k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n &= \underbrace{k_1 2^n + k_2 3^n}_{\text{sol. gén. rel. homogène}} + \underbrace{1}_{\text{sol. part.}} \end{aligned}$$

— **Recherche de la suite vérifiant les conditions initiales :**

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} k_1 + k_2 + 1 = 1 \\ 2k_1 + 3k_2 + 1 = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = 1 \end{cases}.$$

Bilan : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3^n - 2^n + 1$.

4. Cette équation n'est pas non plus linéaire.
   (a) **Solution particulière :**

   On cherche une solution particulière sous la forme d'une suite affine en n : $\alpha_n = \lambda n + \mu$.

   On trouve : $\alpha_n = n + \dfrac{2}{3}$

   (b) **Solution homogène de** $u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n$

   $\mathrm{E}_c : r^2 = 10r - 21$ a pour solutions 3 et 7

   D'après le cours, $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = k_1 3^n + k_2 7^n$

   (c) **Sol générale :**

   La suite recherchée est donnée par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = k_1 3^n + k_2 7^n + n + \dfrac{2}{3}$ avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

   (d) **Conditions initiales :**

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -3^n + \dfrac{7^n}{3} + n + \dfrac{2}{3}$.

5. L'idée est de linéariser car au logarithme.
   — On démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
   — On peut alors poser $v_n = \ln(u_n)$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln(u_n u_{n+2}) &= \ln(2u_{n+1}^3) \\ v_n + v_{n+2} &= \ln 2 + 3v_{n+1}. \end{aligned}$$

   — Le même raisonnement que précédemment conduit alors à :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = k_1 \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + k_2 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \ln 2.$$

   — On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{2} \exp\left(k_1 \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + k_2 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

   — Les constantes k_1 et k_2 sont déterminées par les conditions initiales. On trouve :

$$k_1 = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\sqrt{5}}{10}(2\ln 3 - \ln 2) \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\sqrt{5}}{10}(2\ln 3 - \ln 2).$$

Exercice 14 : On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.

2. Justifier l'existence de deux suites réelles (α_n) et (β_n) telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = \alpha_n A + \beta_n A^2.$$

Déterminer les réels α_n et β_n en fonction de n.

Exercice 15 (Suite de Fibonacci bis) : Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Calculer F_n pour tout entier n.
2. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = (-1)^n$.
3. Montrer que la suite $\left(\dfrac{F_{n+1}}{F_n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge, et déterminer sa limite.
4. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k = F_{2n}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}F_k = -F_n$.

Correction :

1. $(E_c) : r^2 = r + 1$ dont les solutions sont $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, le nombre d'or et $\overline{\varphi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

   Donc il existe deux constantes, α et β telles que :

   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \alpha\varphi^n + \beta\overline{\varphi}^n.$$

   α et β sont déterminés par les conditions initiales :

   $$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha\varphi + \beta\overline{\varphi} = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \beta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

   En conclusion,

   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

2. Par récurrence :
   — $F_{0+1}^2 - F_0F_{0+2} = 1^2 - 0\times 1 = 1 = (-1)^0$.
   — Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = (-1)^n$.

   $$\begin{aligned}\text{Alors } F_{n+2}^2 - F_{n+1}F_{n+3} &= F_{n+2}^2 - F_{n+1}(F_{n+1} + F_{n+2}) \\ &= F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_{n+2} \\ &= F_{n+2}^2 - [(-1)^n + F_nF_{n+2}] - F_{n+1}F_{n+2} \text{ (H.R.)} \\ &= (-1)^{n+1} + F_{n+2}\Big[\underbrace{F_{n+2} - F_n - F_{n+1}}_{=0}\Big] \\ &= (-1)^{n+1}\end{aligned}$$

3. $\forall\, n \geqslant 1,\quad \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \dfrac{\alpha\varphi^{n+1} + \beta\overline{\varphi}^{n+1}}{\alpha\varphi^n + \beta\overline{\varphi}^n} = \dfrac{\varphi^{n+1}\left[\alpha + \beta\left(\overline{\varphi}/\varphi\right)^{n+1}\right]}{\varphi^n\left[\alpha + \beta\left(\overline{\varphi}/\varphi\right)^n\right]}$

$$= \varphi\frac{\alpha + \beta\left(\overline{\varphi}/\varphi\right)^{n+1}}{\alpha + \beta\left(\overline{\varphi}/\varphi\right)^n}.$$

Comme $\overline{\varphi}/\varphi \in \left]-1\,;1\right[$, $\dfrac{F_{n+1}}{F_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi$.

4. φ et $\overline{\varphi}$ sont solutions de $r^2 = r+1$, donc $\varphi^2 = 1+\varphi$ et $\overline{\varphi}^2 = 1+\overline{\varphi}$.

D'où, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\alpha\varphi^k + \beta\overline{\varphi}^k\right) = \alpha\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\varphi^k + \beta\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\overline{\varphi}^k$

$$= \alpha(1+\varphi)^n + \beta(1+\overline{\varphi})^n = \alpha(\varphi^2)^n + \beta(\overline{\varphi}^2)^n = \alpha\varphi^{2n} + \beta\overline{\varphi}^{2n}$$

F_{2n}.

Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k = F_{2n}$.

Dans la même idée, on a : $\begin{cases} 1-\varphi = 1 - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \overline{\varphi} \\ 1-\overline{\varphi} = 1 - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \varphi \end{cases}$ et $\beta = -\alpha$.

D'où $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}F_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\alpha\varphi^k + \beta\overline{\varphi}^k\right) = \alpha\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\varphi^k + \beta\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\overline{\varphi}^k$

$$= \alpha(1-\varphi)^n + \beta(1-\overline{\varphi})^n = \alpha\overline{\varphi}^n + \beta\varphi^n$$
$$= -\left[\beta\overline{\varphi}^n + \alpha\varphi^n\right]$$
$$= -F_n$$

Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}F_k = -F_n$.

Suites récurrentes