Systèmes linéaires et Suites récurrentes

1. Vérifier l'inversibilité de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & -2 & 3 & 8 \\ -4 & -3 & 5 & 13 \\ -5 & -4 & 6 & 17 \end{pmatrix}$ et donner son inverse le cas échéant.

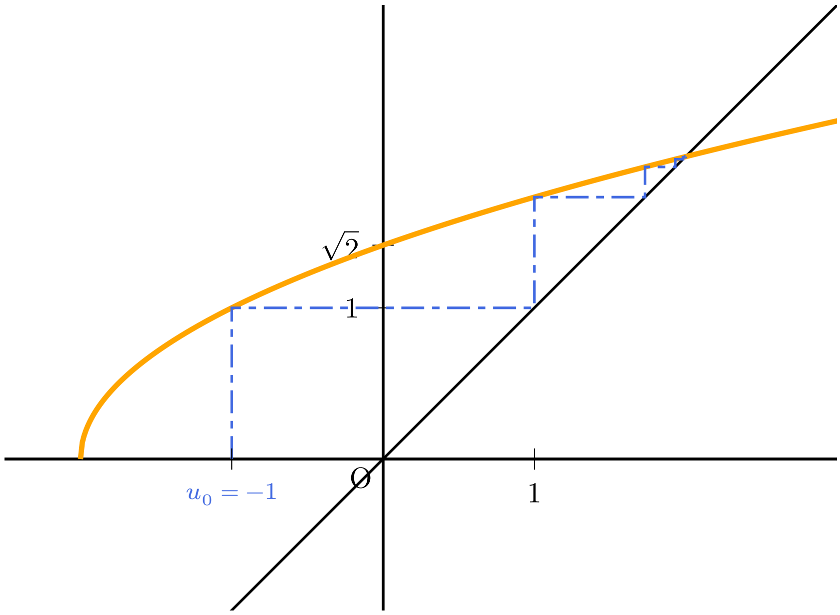
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Résoudre le système ci-dessous. On s'appliquera sur l'écriture de l'ensemble solution.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & t & = & 2 \\ & & & & z & - & t & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & t & = & 2 \\ & & & & z & - & t & = & 1 \end{array} \right. & \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & 2z & & & = & 3 \\ & & & & z & - & t & = & 1 \end{array} \right. \\ & \iff \left\{ \begin{array}{rclcrcl} x & = & 3 & - & 2y & - & z \\ y & = & & & y & & \\ z & = & & & & & z \\ t & = & -1 & & & + & z \end{array} \right. \\ & \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

3. Dans le repère ci-dessous, représenter les premiers termes de la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$.



4. À partir de la contraposée du théorème ci-dessous, écrire 3 propositions équivalentes entre elles.

Théorème 10 :
Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall\, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ admet une unique solution.
(ii) $\forall\, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ admet au moins une solution.
(iii) $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = n$.
(iv) $\mathrm{A} \sim_{\mathrm{L}} \mathrm{I}_n$.
(v) A est inversible.
(vi) Le système $\mathrm{AX} = 0$ n'admet que la solution nulle.

Corollaire 10.1 :
Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) A N'est PAS inversible.
(ii) Il existe $\mathrm{X} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\mathrm{X} \neq (0)_{\mathbb{K}^n}$ et $\mathrm{AX} = (0)_{\mathbb{K}^n}$.
(iii) Il existe une combinaison linéaire nulle des colonnes de A avec des coefficients non tous nuls :
$$\exists\, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \cdots, 0)\}, \quad \alpha_1 \mathrm{A}_1 + \cdots + \alpha_n \mathrm{A}_n = 0_{n,1},$$
où $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ désignent les colonnes de A.

Systèmes linéaires et Suites récurrentes

1. Vérifier l'inversibilité de la matrice $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et donner son inverse le cas échéant.

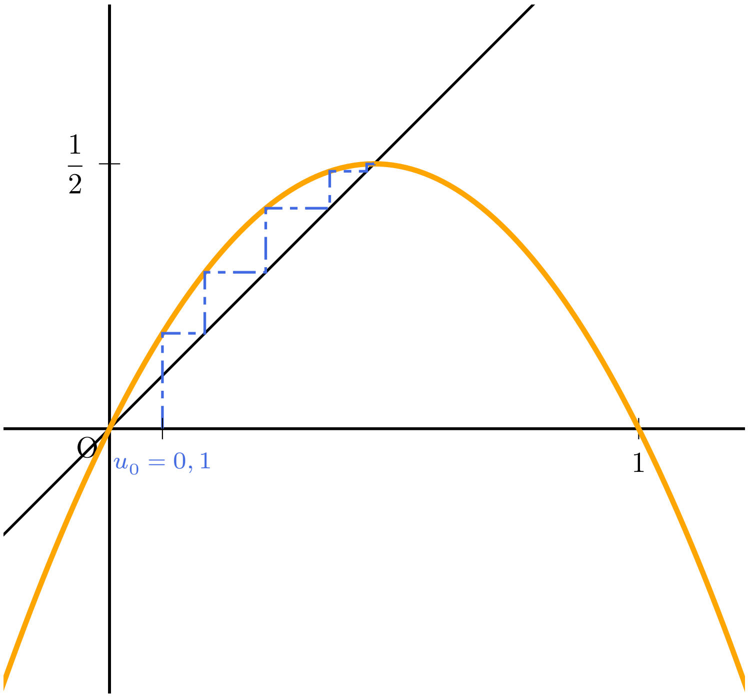
$$\mathrm{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & -2 & 3 & 8 \\ -4 & -3 & 5 & 13 \\ -5 & -4 & 6 & 17 \end{pmatrix}.$$

2. Résoudre le système ci-dessous. On s'appliquera sur l'écriture de l'ensemble solution.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 2 \\ & & y & - & z & - & t & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 2 \\ & & y & - & z & - & t & = & 1 \end{array}\right.
&\iff \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & & & & & = & 3 \\ & & y & - & z & - & t & = & 1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & = & 3 & - & 2y & & \\ y & = & & & y & & \\ z & = & & & & & z \\ t & = & -1 & + & y & - & z \end{array}\right. \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

3. Dans le repère ci-dessous, représenter les premiers termes de la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0{,}1 \\ u_{n+1} = 2u_n(1-u_n) \end{cases}$.



4. À partir de la contraposée du théorème ci-dessous, écrire 3 propositions équivalentes entre elles.

Théorème 10 :
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution.
(ii) $\forall B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution.
(iii) $\mathrm{rg}(A) = n$.
(iv) $A \sim_L I_n$.
(v) A est inversible.
(vi) Le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle.

Corollaire 10.1 :
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) A N'est PAS inversible.
(ii) Il existe $X \in \mathbb{K}^n$ tel que $X \neq (0)_{\mathbb{K}^n}$ et $AX = (0)_{\mathbb{K}^n}$.
(iii) Il existe une combinaison linéaire nulle des colonnes de A avec des coefficients non tous nuls :

$$\exists\, (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \cdots, 0)\}, \quad \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_n A_n = 0_{n,1},$$

où $A_1, \dots, A_n$ désignent les colonnes de A.

Systèmes linéaires et Suites récurrentes