Polynômes

Exercice 1 : Soient p et q dans $\mathbb{N}$, et $\mathrm{P} = (1+\mathrm{X})^p$, $\mathrm{Q} = (1+\mathrm{X})^q$.

Calculer de deux manières différentes le terme en X^n du produit PQ.

Quelle relation peut-on en déduire ?

Exercice 2 : Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants :

1. $\mathrm{P}_1(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^3 - (\mathrm{X} - 2 + i)^2$
2. $\mathrm{P}_3(\mathrm{X}) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2\mathrm{X}^k - k)$, où $n \in \mathbb{N}^*$
3. $\mathrm{P}_4(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}+1)^{2020} - (4\mathrm{X}^2 + a\mathrm{X})^{1010}$, où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 : On considère la suite $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes définie par :

$$\begin{cases} \mathrm{T}_0 = 1,\ \mathrm{T}_1 = 2\mathrm{X}, \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{T}_{n+2} = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1} - \mathrm{T}_n. \end{cases}$$

Ces polynômes sont appelés polynômes de Tchebychev de première espèce.

1. Expliciter T_2 et T_3.
2. Déterminer le degré du polynôme T_n ainsi que son coefficient dominant.
3. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{T}_n(\cos\theta) = \cos n\theta$.
4. En déduire les valeurs de $\mathrm{T}_n(1)$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de T_n appartenant à l'intervalle $[-1\,;1]$. Combien y en a-t-il ? Qu'en déduire ?

Exercice 4 : Déterminer les polynômes :

1. $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{Q}^2 = \mathrm{X}\mathrm{P}^2$.
2. $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{P}^2 - \mathrm{X}\mathrm{Q}^2 = \mathrm{X}\mathrm{R}^2$.
3. $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{P}'^2 = 4\mathrm{P}$

Exercice 5 (Exponentielle d'une matrice nilpotente) : Pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ matrice nilpotente donnée, on pose :

$$\exp(\mathrm{A}) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{\mathrm{A}^k}{k!}, \quad \text{la somme étant finie.} \tag{XIX.1}$$

1. Montrer que si A et B commutent et sont nilpotentes alors $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ est nilpotente.

En déduire que $\exp(A+B)$ existe et que

$$\exp(A+B) = \exp(A) \times \exp(B).$$

2. Montrer que $\exp(A)$ est inversible et donner son inverse.
3. Calculer $\exp(A)$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}$.
4. On supposera que la définition (XIX.1) se généralise à une matrice quelconque.

   Calculer $\exp(M)$ pour les quatre matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Chercher un exemple simple où $\exp(A+B) \neq \exp(A) \times \exp(B)$.

Exercice 6 : Déterminer tous les polynômes P tels que :

$P(2) = 6$, $P'(2) = 1$, $P''(2) = 4$, et $\forall n \geqslant 3, P^{(n)}(2) = 0$.

Exercice 7 : On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que $A^2 - 6A + 9I_2 = 0$
2. En effectuant la division euclidienne de X^n par un polynôme bien choisi, déterminer une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 : Effectuer la division euclidienne de A par B :

1. $A = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$; $B = X^2 - 3X + 1$
2. $A = 2X^5 - 5X^3 - 8X$; $B = X + 3$
3. $A = iX^3 + X^2 - iX$; $B = X - 1 + i$
4. $A = X^4 + iX^3 + 2X - i$; $B = (1-i)X^2 + iX + 1 + i$

Exercice 9 : Dans chaque cas, former une CNS pour que :

1. $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ dans $\mathbb{R}[X]$.
2. $(X-1)^2$ divise $aX^{n+1} + bX^n + 1$ dans $\mathbb{Z}[X]$. Former alors le quotient.

Exercice 10 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que les restes de la division euclidienne de P par $X-1$, $X-2$, $X-3$ sont respectivement 4, 9 et 16.

Quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)(X-2)(X-3)$?

Exercice 11 : Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $(\cos\theta + X\sin\theta)^n$ par le polynôme X^2+1.

Exercice 12 : Soit $P = X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 3X + 2$.

1. Déterminer un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de degré 2, ayant pour racine $2+\sqrt{3}$.
2. Calculer $P\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Exercice 13 : Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a, b \in \mathbb{K}$.

1. On suppose $a \neq b$. Calculer en fonction de a, b, $P(a)$, $P(b)$ le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
2. On suppose $a = b$. Calculer en fonction de a, $P(a)$, $P'(a)$ le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$.

Exercice 14 (Puissances de matrice et division euclidienne) :

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer que $A^2 = 4A + 5I$.
   (b) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. (a) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $D = X^2 - 4X - 5$, $(n \in \mathbb{N})$.
   (b) En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. (a) Exprimer N^2 en fonction de N, puis N^k en fonction de $k \in \mathbb{N}^*$.
   (b) En remarquant que $A = N - I_3$, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 15 : Démontrer que $X^2 - 2X\cos\theta + 1$ divise le polynôme

$$X^{n+1}\cos(n-1)\theta - X^n\cos n\theta - X\cos\theta + 1.$$

Exercice 16 : Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a\,;b) \in \mathbb{C}^2$ pour que $P = X^4 + aX^3 + bX + 1$ ait une racine d'ordre de multiplicité au moins 3.

Exercice 17 : Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 2 dans le polynôme :

$$\mathrm{P} = \mathrm{X}^6 - 7\mathrm{X}^5 + 17\mathrm{X}^4 - 16\mathrm{X}^3 + 8\mathrm{X}^2 - 16\mathrm{X} + 16.$$

Exercice 18 : En utilisant les relations entre racines et coefficients, résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système :

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^2+c^2=9 \\ abc=1 \end{cases}$$

Exercice 19 : Soient $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et $a \in \mathbb{C}$.

Démontrer que si a est une racine multiple de P'' et si $\mathrm{P}''|\mathrm{P}$, alors a est une racine multiple de P et son ordre de multiplicité est au moins 4.

Exercice 20 : Factoriser dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$:

1. $\mathrm{X}^5 - 1$
2. $\mathrm{X}^5 + 1$
3. $\mathrm{X}^8 + 1$
4. $(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1)^2 + 1$
5. $(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 2)^2 + (\mathrm{X} - 2)^2$
6. $6\mathrm{X}^5 + 15\mathrm{X}^4 + 20\mathrm{X}^3 + 15\mathrm{X}^2 + 6\mathrm{X} + 1$
7. $\mathrm{X}^8 + \mathrm{X}^4 + 1$

Exercice 21 : Factoriser Q dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et R, S dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, sachant que Q n'admet que des racines multiples, et que R, S admettent une racine réelle.

1. $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^5 - 13\mathrm{X}^4 + 67\mathrm{X}^3 - 171\mathrm{X}^2 + 216\mathrm{X} - 108$
2. $\mathrm{R} = \mathrm{X}^3 - (3+2i)\mathrm{X}^2 + (3+11i)\mathrm{X} - 2(1+7i)$
3. $\mathrm{S} = 2\mathrm{X}^3 - (5+6i)\mathrm{X}^2 + 9i\mathrm{X} + 1 - 3i$

Exercice 22 : Factoriser les polynômes réels $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 - 9\mathrm{X}^2 + 26\mathrm{X} - 24$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^3 + 3\mathrm{X} - 14$ sachant qu'ils ont une racine commune.

À retenir 1 (Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$) :
Toute fraction rationnelle F à coefficients complexes peut se mettre, de manière unique, sous la forme :

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}) + \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{n_k} \frac{\lambda_{k,l}}{(\mathrm{X} - \alpha_k)^l}.$$

où $\mathrm{E} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ est un polynôme à coefficients complexes.
$\forall\, k \in [\![1\,;p]\!]$, α_k, $\forall\, l \in [\![1\,;n_k]\!]$, $\lambda_{k,l} \in \mathbb{C}$, $n_k \in \mathbb{N}$,

On dit alors α_k est un pôle de f de *multiplicité* n_k.

À retenir 2 (Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$) :
Toute fraction rationnelle F à coefficients réels peut se mettre, de manière unique, sous la forme :

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}) + \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n_k} \frac{\lambda_{k,i}}{(\mathrm{X}-\alpha_k)^i} + \sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{m_k} \frac{\delta_{k,j}\mathrm{X}+\epsilon_{k,j}}{(\mathrm{X}^2+\beta_k\mathrm{X}+\gamma_k)^j}. \tag{XIX.2}$$

où $\mathrm{E} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est un polynôme à coefficients réels.
$\forall\, k \in [\![1\,;p]\!],\ \alpha_k,\ \forall\, i \in [\![1\,;n_k]\!],\ \lambda_{k,i} \in \mathbb{R},\ n_k \in \mathbb{N},$
$\forall\, k \in [\![1\,;q]\!],\ \ \beta_k,\ \gamma_k,\ \forall\, j \in [\![1\,;m_k]\!],\ \delta_{k,j},\ \epsilon_{k,j} \in \mathbb{R},\ m_k \in \mathbb{N}$
$\Delta_k = {\beta_k}^2 - 4\gamma_k < 0.$

On dit alors que α_k est un pôle de f de *multiplicité* n_k.

Exercice 23 : Décomposition en éléments simples guidée :

$$\Phi = \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 - 6x + 1}{2x^3 - x^2}.$$

1. Par division euclidienne, montrer que $\Phi = x + 1 + \Phi_1$ avec $\Phi_1 = \dfrac{4x^2 - 6x + 1}{2x^3 - x^2}$.
2. Montrer qu'il existe trois réels A, B et C tels que :

$$\Phi_1 = \frac{\mathrm{A}}{x^2} + \frac{\mathrm{B}}{x} + \frac{\mathrm{C}}{x - \frac{1}{2}}. \tag{XIX.3}$$

Exercice 24 : Décomposition en éléments simples guidée :

$$\Phi = \frac{2x^5 - 8x^3 + 8x^2 - 4x + 1}{x^3(x-1)^2}.$$

1. Montrer que Φ peut se mettre sous la forme : $\Phi = 2 + \Phi_1$ où $\Phi_1 = \dfrac{4x^4 - 10x^3 + 8x^2 - 4x + 1}{x^3(x-1)^2}$.
2. Expliquer pourquoi Φ_1 peut s'écrire sous la forme : $\Phi_1 = \dfrac{\mathrm{A}}{x^3} + \dfrac{\mathrm{B}}{x^2} + \dfrac{\mathrm{C}}{x} + \dfrac{\mathrm{D}}{(x-1)^2} + \dfrac{\mathrm{E}}{x-1}$.
3. Expliquer comment la méthode de l'exercice précédent permettrait de trouver A et D.

   On ne demande pas de déterminer A et D ici mais on va plutôt appliquer une méthode plus efficace ici : la division suivant les puissances croissantes :
4. En effectuant la division suivant les puissances croissantes de $1 - 4x + 8x^2 - 10x^3 + 4x^4$ par $(x-1)^2 = 1 - 2x + x^2$ montrer que :

$$1 - 4x + 8x^2 - 10x^3 + 4x^4 = (1 - 2x + x^2) \times (1 - 2x + 3x^2) + (-2x^3 + x^4). \tag{XIX.4}$$

5. En déduire A, B et C.
6. Terminer la décomposition.

Exercice 25 : Décomposition en éléments simples guidée :

$$\Phi = \frac{4x^6 - 2x^5 + 11x^4 - x^3 + 11x^2 + 2x + 3}{x(x^2+1)^3}.$$

1. En vous aidant de (XIX.2), donner la décomposition générale de Φ.
2. Montrer que $\Phi - \dfrac{3}{x} = \Phi_1$ où $\Phi_1 = \dfrac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 2}{(x^2+1)^3}$.
3. En divisant successivement suivant les puissances décroissantes le numérateur de Φ_1 par x^2+1, puis le quotient obtenu par x^2+1, donner la décomposition en éléments simples de Φ_1.
4. Donner la décomposition en éléments simples de Φ.

Exercice 26 : Décomposer en éléments simples

1. $\dfrac{X^3 - 3X^2 + X - 4}{X - 1}$ sur $\mathbb{R}$.
2. $\dfrac{2X^3 + X^2 - X + 1}{X^2 - 3X + 2}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $\dfrac{2X^3 + X^2 - X + 1}{X^2 - 2X + 1}$ sur $\mathbb{R}$.
4. $\dfrac{X^4 + 2X^2 + 1}{X^2 - 1}$ sur $\mathbb{R}$.
5. $\dfrac{X}{X^2 - 4}$ sur $\mathbb{R}$.
6. $\dfrac{X^5 + X^4 + 1}{X^3 - X}$ sur $\mathbb{R}$.
7. $\dfrac{X^5 + X^4 + 1}{X(X-1)^4}$ sur $\mathbb{R}$.
8. $\dfrac{X^5 + X^4 + 1}{(X-1)^3(X+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$.
9. $\dfrac{X^7 + 3}{(X^2 + X + 2)^3}$ sur $\mathbb{R}$.
10. $\dfrac{(3-2i)X - 5 + 3i}{X^2 + iX + 2}$ sur $\mathbb{C}$.
11. $\dfrac{X + i}{X^2 + i}$ sur $\mathbb{C}$.
12. $\dfrac{X}{(X+i)^2}$ sur $\mathbb{C}$.
13. $\dfrac{X^2 + 1}{X^4 + 1}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
14. $\dfrac{X}{X^4 + 1}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
15. $\dfrac{X^2 + X + 1}{X^4 + 1}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
16. $\dfrac{X^5 + X + 1}{X^4 - 1}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
17. $\dfrac{X^5 + X + 1}{X^6 - 1}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
18. $\dfrac{X^3 - 2}{X^4(X^2 + X + 1)^2}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
19. $\dfrac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
20. $\dfrac{X^2 - 3}{(X^2+1)(X^2+4)}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

Exercice 27 : Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{X^2+3X+5}{X^2-3X+2}$
2. $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$
3. $\dfrac{1}{X(X-1)^2}$
4. $\dfrac{X^2+1}{(X-1)^2(X+1)^2}$
5. $\dfrac{1}{(X-2)^3(X+2)^3}$
6. $\dfrac{X^6}{(X^3-1)^2}$
7. $\dfrac{1}{X^6+1}$
8. $\dfrac{X^2+3}{X^5-3X^4+5X^3-7X^2+6X-2}$
9. $\dfrac{X}{(X^2+1)^3(X^2-1)}$
10. $\dfrac{X^6+1}{X^5-X^4+X^3-X^2+X-1}$
11. $\dfrac{X^7+1}{(X^2+X+1)^3}$
12. $\dfrac{X^2+1}{X(X-1)^4(X^2-2)^2}$
13. $\dfrac{1}{(X+1)^7-X^7-1}$
14. $\dfrac{1}{X^n-1}$
15. $\dfrac{1}{(X-1)(X^n-1)}$
16. $\dfrac{n!}{(X-1)(X-2)...(X-n)}$
17. $\dfrac{X^2}{X^4-2X^2\cos(2a)+1}$
18. $\dfrac{1}{X^{2n}+1}$