Polynômes

Exercice 1 : Soient p et q dans $\mathbb{N}$, et $P = (1 + X)^p$, $Q = (1 + X)^q$.

Calculer de deux manières différentes le terme en X^n du produit PQ .

Quelle relation peut-on en déduire ?

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Comme $(1 + X)^p(1 + X)^q = (1 + X)^{p+q}$ le terme de degré X^n est $\binom{p+q}{n}$ d'après la formule du binôme.
- Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les coefficients de P et Q respectivement et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ceux de PQ . On a :

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k}.$$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k}$. Identité dite de Vandermonde.

Exercice 2 : Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants :

- $P_1(X) = X^3 - (X - 2 + i)^2$
- $P_3(X) = \prod_{k=1}^n (2X^k - k)$, où $n \in \mathbb{N}^*$
- $P_4(X) = (X + 1)^{2020} - (4X^2 + aX)^{1010}$, où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 : On considère la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes définie par :

$$\begin{cases} T_0 = 1, T_1 = 2X, \\ \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n. \end{cases}$$

Ces polynômes sont appelés polynômes de Tchebychev de première espèce.

- Expliciter T_2 et T_3 .
- Déterminer le degré du polynôme T_n ainsi que son coefficient dominant.
- Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$.
- En déduire les valeurs de $T_n(1)$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de T_n appartenant à l'intervalle $[-1; 1]$. Combien y en a-t-il ? Qu'en déduire ?

Exercice 4 : Déterminer les polynômes :

1. $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $Q^2 = XP^2$.
2. $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P^2 - XQ^2 = XR^2$.
3. $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P'^2 = 4P$

Exercice 5 (Exponentielle d'une matrice nilpotente) : Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrice nilpotente donnée, on pose :

$$\exp(A) = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}, \text{ la somme étant finie.} \quad (\text{XIX.1})$$

1. Montrer que si A et B commutent et sont nilpotentes alors $A + B$ est nilpotente.

En déduire que $\exp(A + B)$ existe et que

$$\exp(A + B) = \exp(A) \times \exp(B).$$

2. Montrer que $\exp(A)$ est inversible et donner son inverse.

3. Calculer $\exp(A)$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

4. On supposera que la définition (XIX.1) se généralise à une matrice quelconque.

Calculer $\exp(M)$ pour les quatre matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Chercher un exemple simple où $\exp(A + B) \neq \exp(A) \times \exp(B)$.

Correction :

1. Soient p l'indice de nilpotence de A et q l'indice de nilpotence de B . Puisque A et B commutent, la formule du binôme de NEWTON fournit

$$(A + B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^k B^{p+q-1-k}$$

Dans cette somme,

- si $k \geq p$, $A^k = 0$ et donc $A^k B^{p+q-1-k} = 0$
- si $k \leq p-1$ alors $p+q-1-k \geq q$ et encore une fois $B^{p+q-1-k} = 0$.

Finalement, $(A + B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^k B^{p+q-1-k} = 0$ et $A + B$ est nilpotente d'indice inférieur ou égal à $p + q - 1$.

Les sommes définissant $\exp(A)$, $\exp(B)$ et $\exp(A + B)$ sont finies car A , B et $A + B$ sont nilpotentes et

$$\begin{aligned} \exp(A + B) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (A + B)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i+j=k} \frac{1}{i!j!} A^i B^j \\ &= \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} A^i \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} B^j \right) \quad (\text{toutes les sommes sont finies}) \\ &= \exp(A) \times \exp(B). \end{aligned}$$

2. Si A est nilpotente, $-A$ l'est aussi et commute avec A .

Donc $\exp(A) \times \exp(-A) = \exp(A - A) = \exp(0) = I_n$.

$\exp(A)$ est inversible à gauche et, facilement à droite, donc inversible et $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$.

3. Les puissances de A sont bien connues et on trouve immédiatement

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \frac{1}{2!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{1}{1!} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 : Déterminer tous les polynômes P tels que :

$P(2) = 6$, $P'(2) = 1$, $P''(2) = 4$, et $\forall n \geq 3, P^{(n)}(2) = 0$.

Correction : Soit d le degré du polynôme. On a nécessairement $d \geq 2$ sinon P'' serait nul.

D'après la formule de Taylor :

$$\begin{aligned} P &= \sum_{n=0}^p \frac{P^{(n)}(2)}{n!} (X - 2)^n \\ &= P(2) + P'(2)(X - 2) + \frac{P''(2)}{2!} (X - 2)^2 + 0 \\ &= 6 + (X - 2) + \frac{4}{2!} (X - 2)^2 \\ &= 6 + (X - 2) + 2(X - 2)^2 \\ P &= 2X^2 - 7X + 12. \end{aligned}$$

Exercice 7 : On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

- Vérifier que $A^2 - 6A + 9I_2 = 0$
- En effectuant la division euclidienne de X^n par un polynôme bien choisi, déterminer une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 : Effectuer la division euclidienne de A par B :

- $A = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$; $B = X^2 - 3X + 1$
- $A = 2X^5 - 5X^3 - 8X$; $B = X + 3$
- $A = iX^3 + X^2 - iX$; $B = X - 1 + i$
- $A = X^4 + iX^3 + 2X - i$; $B = (1 - i)X^2 + iX + 1 + i$

Correction :

- $A = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$; $B = X^2 - 3X + 1$

$$\begin{cases} Q = 2X^2 + 3X + 11 \\ R = 25X - 5 \end{cases}$$

- $A = 2X^5 - 5X^3 - 8X$; $B = X + 3$

$$\begin{cases} Q = 2X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 39X + 109 \\ R = -327 \end{cases}$$

- $A = iX^3 + X^2 - iX$; $B = X - 1 + i$

$$\begin{cases} Q = iX^2 + (2 + i)X + (3 - 2i) \\ R = 1 - 5i \end{cases}$$

- $A = X^4 + iX^3 + 2X - i$; $B = (1 - i)X^2 + iX + 1 + i$

$$\begin{cases} Q = \frac{1+i}{2}X^2 + \frac{i}{2}X + \frac{3-i}{4} \\ R = \frac{9-5i}{4}X - \frac{2+3i}{2} \end{cases}$$

Exercice 9 : Dans chaque cas, former une CNS pour que :

- $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ dans $\mathbb{R}[X]$.
- $(X - 1)^2$ divise $aX^{n+1} + bX^n + 1$ dans $\mathbb{Z}[X]$. Former alors le quotient.

Correction :

- Division euclidienne de $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ par $X^2 + 2$:

$$X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2 = (X^2 + 2)[X^2 - X + (2 - \lambda)] + (\mu - 2)X + (6 - 2\lambda)$$

$$\begin{aligned}
 X^2 + 2 \mid X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2 &\Leftrightarrow (\mu - 2)X + (6 - 2\lambda) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \mu - 2 = 0 \\ 6 - 2\lambda = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 2 \\ \lambda = 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$X^2 + 2 \mid X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 2 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

2. Soit $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$.

$$\begin{aligned}
 (X - 1)^2 \mid P &\Leftrightarrow 1 \text{ est une racine au moins double de } P \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} P(1) = 0 \\ P'(1) = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ (n + 1)a + nb = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a = n \\ b = -(n + 1) \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$(X - 1)^2 \mid aX^{n+1} + bX^n + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = n \\ b = -(n + 1) \end{cases}$$

$$P = nX^{n+1} - (n + 1)X^n + 1.$$

Pour obtenir le quotient, on peut utiliser la formule de Taylor :

$$\begin{aligned}
 P &= \sum_{i=0}^{n+1} \frac{P^{(i)}(1)}{i!} (X - 1)^i \\
 P &= \underbrace{P(1) + P'(1)(X - 1)}_{R=0} + (X - 1)^2 \underbrace{\sum_{i=2}^{n+1} \frac{P^{(i)}(1)}{i!} (X - 1)^{(i-2)}}_Q
 \end{aligned}$$

$$\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, P^{(i)} = n \frac{(n+1)!}{(n+1-i)!} X^{n+1-i} - (n+1) \frac{n!}{(n-i)!} X^{n-i}$$

$$\text{et } P^{(n+1)} = n(n+1)!$$

etc.

Exercice 10 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que les restes de la division euclidienne de P par $X - 1$, $X - 2$, $X - 3$ sont respectivement 4, 9 et 16.

Quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X - 1)(X - 2)(X - 3)$?

Correction : La division euclidienne s'écrit

$$\begin{cases} P = (X - 1)(X - 2)(X - 3)Q + R \\ \deg R < 3. \end{cases}$$

On pose $R = aX^2 + bX + c$.

$$\begin{cases} 4 = \tilde{P}(1) = a + b + c \\ 9 = \tilde{P}(2) = a + 2b + 4c \\ 16 = \tilde{P}(3) = a + 3b + 9c \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$R = X^2 + 2X + 1$$

Exercice 11 : Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $(\cos \theta + X \sin \theta)^n$ par le polynôme $X^2 + 1$.

Exercice 12 : Soit $P = X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 3X + 2$.

- Déterminer un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de degré 2, ayant pour racine $2 + \sqrt{3}$.
- Calculer $P(2 + \sqrt{3})$.

Exercice 13 : Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a, b \in \mathbb{K}$.

- On suppose $a \neq b$. Calculer en fonction de $a, b, P(a), P(b)$ le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.
- On suppose $a = b$. Calculer en fonction de $a, P(a), P'(a)$ le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$.

Exercice 14 (Puissances de matrice et division euclidienne) :

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- (a) Montrer que $A^2 = 4A + 5I$.
(b) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .
- (a) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $D = X^2 - 4X - 5$, ($n \in \mathbb{N}$).

- (b) En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. (a) Exprimer N^2 en fonction de N , puis N^k en fonction de $k \in \mathbb{N}^*$.
- (b) En remarquant que $A = N - I_3$, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction :

1. (a) Après calcul $A^2 = 4A + 5I$.
- (b) $A^2 = 4A + 5I \iff A \cdot \frac{1}{5}(A - 4I_3) = \frac{1}{5}(A - 4I_3) \cdot A = I_3$ donc A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{5}(A - 4I_3) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Comme $\deg(X^2 - 4X - 5) = 2$, il existe un unique couple de polynômes $(Q; R)$ avec $R = aX + b$ tel que

$$X^n = (X^2 - 4X - 5)Q + aX + b.$$

Évaluons X^n en les racines -1 et 5 de $X^2 - 4X - 5$. Le couple $(a; b)$ est alors solution du système :

$$\begin{cases} -a + b = (-1)^n \\ 5a + b = 5^n \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{5^n - (-1)^n}{6} \\ b = \frac{5(-1)^n + 5^n}{6}. \end{cases}$$

Donc, $R = \frac{5^n - (-1)^n}{6}X + \frac{5(-1)^n + 5^n}{6}$.

- (b) Comme D est un polynôme annulateur de A i.e. $D(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = \frac{5^n - (-1)^n}{6}A + \frac{5(-1)^n + 5^n}{6}I_3$$

3. (a) Après calcul, $N^2 = 6N$. On en déduit, par récurrence si nécessaire que,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, N^k = 6^{k-1}N.$$

- (b) Les matrices N et I commutant, on peut utiliser le binôme de Newton pour calculer A^n

Exercice 15 : Démontrer que $X^2 - 2X \cos \theta + 1$ divise le polynôme

$$X^{n+1} \cos(n-1)\theta - X^n \cos n\theta - X \cos \theta + 1.$$

Exercice 16 : Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a; b) \in \mathbb{C}^2$ pour que $P = X^4 + aX^3 + bX + 1$ ait une racine d'ordre de multiplicité au moins 3.

Exercice 17 : Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 2 dans le polynôme :

$$P = X^6 - 7X^5 + 17X^4 - 16X^3 + 8X^2 - 16X + 16.$$

Correction : Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 2 dans le polynôme :

$$P = X^6 - 7X^5 + 17X^4 - 16X^3 + 8X^2 - 16X + 16$$

$$\begin{array}{ll} P = X^6 - 7X^5 + 17X^4 - 16X^3 + 8X^2 - 16X + 16 & P(2) = 0 \\ P' = 6X^5 - 35X^4 + 68X^3 - 48X^2 + 16X - 16 & P'(2) = 0 \\ P'' = 30X^4 - 140X^3 + 204X^2 - 96X + 16 & P''(2) = 0 \\ P^{(3)} = 120X^3 - 420X^2 + 408X - 96 & P^{(3)}(2) = 0 \\ P^{(4)} = 360X^2 - 840X + 408 & P^{(4)}(2) = 168 \end{array}$$

2 est une racine de P d'ordre 4.

Exercice 18 : En utilisant les relations entre racines et coefficients, résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système :

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 9 \\ abc = 1 \end{cases}$$

Exercice 19 : Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $a \in \mathbb{C}$.

Démontrer que si a est une racine multiple de P'' et si $P''|P$, alors a est une racine multiple de P et son ordre de multiplicité est au moins 4.

Exercice 20 : Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $X^5 - 1$
2. $X^5 + 1$
3. $X^8 + 1$
4. $(X^2 - X + 1)^2 + 1$
5. $(X^2 - X + 2)^2 + (X - 2)^2$
6. $6X^5 + 15X^4 + 20X^3 + 15X^2 + 6X + 1$
7. $X^8 + X^4 + 1$

Correction :

1.

$$\begin{aligned} X^5 - 1 &= \prod_{k=0}^4 (X - e^{\frac{2ik\pi}{5}}) \\ &= (X - 1) (X - e^{\frac{2i\pi}{5}}) (X - e^{-\frac{2i\pi}{5}}) (X - e^{\frac{4i\pi}{5}}) (X - e^{-\frac{4i\pi}{5}}) \\ &= (X - 1) \left(X^2 - 2X \cos \frac{2\pi}{5} + 1 \right) \left(X^2 - 2X \cos \frac{4\pi}{5} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$X^5 - 1 = (X - 1) \left(X^2 - 2X \cos \frac{2\pi}{5} + 1 \right) \left(X^2 - 2X \cos \frac{4\pi}{5} + 1 \right)$$

NB : $X^5 - 1 = (X - 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$

2.

$$\begin{aligned} X^5 + 1 &= \prod_{k=0}^4 (X - e^{i(\frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5})}) \\ &= (X - e^{i\frac{\pi}{5}}) (X - e^{i\frac{3\pi}{5}}) (X + 1) (X - e^{-i\frac{3\pi}{5}}) (X - e^{-i\frac{\pi}{5}}) \\ &= (X + 1) \left(X^2 - 2X \cos \frac{\pi}{5} + 1 \right) \left(X^2 - 2X \cos \frac{3\pi}{5} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$X^5 + 1 = (X + 1) \left(X^2 - 2X \cos \frac{\pi}{5} + 1 \right) \left(X^2 - 2X \cos \frac{3\pi}{5} + 1 \right)$$

3.

$$\begin{aligned} X^8 + 1 &= \prod_{k=0}^7 (X - e^{i(\frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{8})}) \\ &= (X - e^{i\frac{\pi}{8}}) (X - e^{i\frac{3\pi}{8}}) (X - e^{i\frac{5\pi}{8}}) (X - e^{i\frac{7\pi}{8}}) \\ &\quad (X - e^{-i\frac{\pi}{8}}) (X - e^{-i\frac{3\pi}{8}}) (X - e^{-i\frac{5\pi}{8}}) (X - e^{-i\frac{7\pi}{8}}) \\ &= \left(X^2 - 2X \cos \frac{\pi}{8} + 1 \right) \left(X^2 - 2X \cos \frac{3\pi}{8} + 1 \right) \\ &\quad \left(X^2 - 2X \cos \frac{5\pi}{8} + 1 \right) \left(X^2 - 2X \cos \frac{7\pi}{8} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$X^8 + 1 = \left(X^2 - 2X \cos \frac{\pi}{8} + 1 \right) \left(X^2 - 2X \cos \frac{3\pi}{8} + 1 \right) \left(X^2 - 2X \cos \frac{5\pi}{8} + 1 \right) \left(X^2 - 2X \cos \frac{7\pi}{8} + 1 \right)$$

Une autre méthode :

$$\begin{aligned} X^8 + 1 &= (X^4 + 1)^2 - 2X^4 \\ &= (X^4 - X^2\sqrt{2} + 1) (X^4 + X^2\sqrt{2} + 1) \\ &= [(X^2 + 1)^2 - (2 + \sqrt{2})X^2] [(X^2 + 1)^2 - (2 - \sqrt{2})X^2] \\ &= \left(X^2 - X\sqrt{2 + \sqrt{2}} + 1 \right) \left(X^2 - X\sqrt{2 - \sqrt{2}} + 1 \right) \\ &\quad \left(X^2 + X\sqrt{2 + \sqrt{2}} + 1 \right) \left(X^2 + X\sqrt{2 - \sqrt{2}} + 1 \right) \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} X^8 + 1 &= \left[X^2 - X\sqrt{2 + \sqrt{2}} + 1 \right] \left[X^2 + X\sqrt{2 + \sqrt{2}} + 1 \right] \left[X^2 - X\sqrt{2 - \sqrt{2}} + 1 \right] \left[X^2 + X\sqrt{2 - \sqrt{2}} + 1 \right] \\ &= \left(X^2 - 2X \cos \frac{\pi}{8} + 1 \right) \left(X^2 - 2X \cos \frac{3\pi}{8} + 1 \right) \left(X^2 - 2X \cos \frac{5\pi}{8} + 1 \right) \left(X^2 - 2X \cos \frac{7\pi}{8} + 1 \right) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} (X^2 - X + 1)^2 + 1 &= (X^2 - X + 1)^2 - (i)^2 \\ &= [X^2 - X + 1 - i][X^2 - X + 1 + i] \\ &= [(X + i)(X - 1 - i)][(X - i)(X - 1 + i)] \\ &= (X + i)(X - i)(X - 1 - i)(X - 1 + i) \\ &= (X^2 + 1)(X^2 - 2X + 2) \end{aligned}$$

$$(X^2 - X + 1)^2 + 1 = (X^2 + 1)(X^2 - 2X + 2)$$

5.

$$\begin{aligned} & (X^2 - X + 2)^2 + (X - 2)^2 \\ &= (X^2 - X + 2)^2 - [i(X - 2)]^2 \\ &= [(X^2 - X + 2) - i(X - 2)] [(X^2 - X + 2) + i(X - 2)] \\ &= [X^2 + (-1 - i)X + (2 + 2i)] [X^2 + (-1 + i)X + (2 - 2i)] \\ &= [X - 2i] [X - (1 - i)] [X + 2i] [X - (1 + i)] \\ &= [X - 2i] [X + 2i] [X - (1 - i)] [X - (1 + i)] \\ &= (X^2 + 4)(X^2 - 2X + 2) \end{aligned}$$

$$(X^2 - X + 2)^2 + (X - 2)^2 = (X^2 + 4)(X^2 - 2X + 2)$$

6. $P = 6X^5 + 15X^4 + 20X^3 + 15X^2 + 6X + 1 = (X + 1)^6 - X^6.$

$$\begin{aligned} \alpha \text{ est une racine de } P &\Leftrightarrow P(\alpha) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha + 1)^6 - \alpha^6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^6 = 1 \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{U}_6 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in [0, 5], \quad 1 + \frac{1}{\alpha} = e^{\frac{2ik\pi}{6}} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in [1, 5], \quad \alpha = \frac{1}{e^{\frac{2ik\pi}{6}} - 1} \\ &\Leftrightarrow \alpha \in \left\{ e^{-\frac{2i\pi}{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{5i\pi}{6}}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3} e^{\frac{5i\pi}{6}}, e^{\frac{2i\pi}{3}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= 6 \left(X + \frac{1}{2}\right) \left(X - e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right) \left(X - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) \left(X - \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-\frac{5i\pi}{6}}\right) \left(X - \frac{\sqrt{3}}{3} e^{\frac{5i\pi}{6}}\right) \\ &= 6 \left(X + \frac{1}{2}\right) (X^2 + X + 1) \left(X^2 + X + \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

$$6X^5 + 15X^4 + 20X^3 + 15X^2 + 6X + 1 = 6 \left(X + \frac{1}{2}\right) (X^2 + X + 1) \left(X^2 + X + \frac{1}{3}\right).$$

7.

$$\begin{aligned} X^8 + X^4 + 1 &= (X^4 + 1)^2 - X^4 \\ &= [X^4 - X^2 + 1] [X^4 + X^2 + 1] \\ &= [(X^2 + 1)^2 - 3X^2] [(X^2 + 1)^2 - X^2] \\ &= [X^2 - X\sqrt{3} + 1] [X^2 + X\sqrt{3} + 1] [X^2 - X + 1] [X^2 + X + 1] \end{aligned}$$

$$X^8 + X^4 + 1 = [X^2 - X\sqrt{3} + 1] [X^2 + X\sqrt{3} + 1] [X^2 - X + 1] [X^2 + X + 1]$$

Remarque : $(X^8 + X^4 + 1)(X^4 - 1) = X^{12} - 1$

$$(X^8 + X^4 + 1) \prod_{\zeta \in U_4} (X - \zeta) = \prod_{\zeta \in U_{12}} (X - \zeta)$$

$$X^8 + X^4 + 1 = \prod_{\zeta \in U_{12} \setminus U_4} (X - \zeta)$$

Exercice 21 : Factoriser Q dans $\mathbb{R}[X]$ et R, S dans $\mathbb{C}[X]$, sachant que Q n'admet que des racines multiples, et que R, S admettent une racine réelle.

1. $Q = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$
2. $R = X^3 - (3 + 2i)X^2 + (3 + 11i)X - 2(1 + 7i)$
3. $S = 2X^3 - (5 + 6i)X^2 + 9iX + 1 - 3i$

Correction :

1. $Q = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$

$$Q = (X - 3)^3(X - 2)^2$$

2. $R = X^3 - (3 + 2i)X^2 + (3 + 11i)X - 2(1 + 7i)$

$$R = (X - 2)[X^2 - (1 + 2i)X + (1 + 7i)]$$

$$R = (X - 2)(X + 1 - 3i)(X - 2 + i)$$

3. $S = 2X^3 - (5 + 6i)X^2 + 9iX + 1 - 3i$

$$S = (2X - 1)[X^2 - (2 + 3i)X + (-1 + 3i)]$$

$$S = (2X - 1)(X - 1 - i)(X - 1 - 2i)$$

Exercice 22 : Factoriser les polynômes réels $P = X^3 - 9X^2 + 26X - 24$ et $Q = X^3 + 3X - 14$ sachant qu'ils ont une racine commune.

Correction : Soit α une racine commune à $\begin{cases} P = X^3 - 9X^2 + 26X - 24 \\ Q = X^3 + 3X - 14 \end{cases}$

Alors α est une racine de $P - Q = -9X^2 + 23X - 10$.

Donc $\alpha = 2$ ou $\alpha = \frac{5}{9}$.

On constate que 2 est bien une racine commune à P et Q .

$$\begin{cases} P = (X - 2)(X^2 - 7X + 12) \\ Q = (X - 2)(X^2 + 2X + 7) \end{cases} \iff \begin{cases} P = (X - 2)(X - 3)(X - 4) \\ Q = (X - 2)(X^2 + 2X + 7) \end{cases}$$

À retenir 1 (Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$) :

Toute fraction rationnelle F à coefficients complexes peut se mettre, de manière unique, sous la forme :

$$F(X) = E(X) + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^{n_k} \frac{\lambda_{k,l}}{(X - \alpha_k)^l}.$$

où $E \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme à coefficients complexes.

$$\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \alpha_k, \forall l \in \llbracket 1; n_k \rrbracket, \lambda_{k,l} \in \mathbb{C}, n_k \in \mathbb{N},$$

On dit alors α_k est un pôle de f de *multiplicité* n_k .

À retenir 2 (Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$) :

Toute fraction rationnelle F à coefficients réels peut se mettre, de manière unique, sous la forme :

$$F(X) = E(X) + \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^{n_k} \frac{\lambda_{k,i}}{(X - \alpha_k)^i} + \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^{m_k} \frac{\delta_{k,j}X + \epsilon_{k,j}}{(X^2 + \beta_k X + \gamma_k)^j}. \quad (\text{XIX.2})$$

où $E \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme à coefficients réels.

$$\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \alpha_k, \forall i \in \llbracket 1; n_k \rrbracket, \lambda_{k,i} \in \mathbb{R}, n_k \in \mathbb{N},$$

$$\forall k \in \llbracket 1; q \rrbracket, \beta_k, \gamma_k, \forall j \in \llbracket 1; m_k \rrbracket, \delta_{k,j}, \epsilon_{k,j} \in \mathbb{R}, m_k \in \mathbb{N}$$

$$\Delta_k = \beta_k^2 - 4\gamma_k < 0.$$

On dit alors que α_k est un pôle de f de *multiplicité* n_k .

Exercice 23 : Décomposition en éléments simples guidée :

$$\Phi = \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 - 6x + 1}{2x^3 - x^2}.$$

- Par division euclidienne, montrer que $\Phi = x + 1 + \Phi_1$ avec $\Phi_1 = \frac{4x^2 - 6x + 1}{2x^3 - x^2}$.
- Montrer qu'il existe trois réels A , B et C tels que :

$$\Phi_1 = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x - \frac{1}{2}}. \quad (\text{XIX.3})$$

Correction :

- Easy...
- On factorise le dénominateur pour trouver les pôles 0, double et $\frac{1}{2}$ simple puis on écrit la décomposition (XIX.2).

$$\Phi_1 = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x - \frac{1}{2}}.$$

— On obtient alors A en multipliant les deux membres de (XIX.3) par x^2 et en passant à la limite quand x tend vers 0 ($A = -1$).

- On obtient de même C par multiplication par $x - \frac{1}{2}$ et calcul de la limite quand x tend vers $\frac{1}{2}$ ($C = -2$).
- Enfin on trouve B en identifiant pour une valeur particulière non encore utilisée, par exemple $x = 1$, ou mieux en multipliant les deux membres de (XIX.3) par x et en passant à la limite pour $x \rightarrow \infty$ ($B = 4$).

Finalement,

$$\frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 - 6x + 1}{2x^3 - x^2} = x + 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x} - \frac{2}{x - \frac{1}{2}}.$$

Exercice 24 : Décomposition en éléments simples guidée :

$$\Phi = \frac{2x^5 - 8x^3 + 8x^2 - 4x + 1}{x^3(x-1)^2}.$$

1. Montrer que Φ peut se mettre sous la forme : $\Phi = 2 + \Phi_1$ où $\Phi_1 = \frac{4x^4 - 10x^3 + 8x^2 - 4x + 1}{x^3(x-1)^2}$.
2. Expliquer pourquoi Φ_1 peut s'écrire sous la forme : $\Phi_1 = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{x-1}$.
3. Expliquer comment la méthode de l'exercice précédent permettrait de trouver A et D.

On ne demande pas de déterminer A et D ici mais on va plutôt appliquer une méthode plus efficace ici : la division suivant les puissances croissantes :

4. En effectuant la division suivant les puissances croissantes de $1 - 4x + 8x^2 - 10x^3 + 4x^4$ par $(x-1)^2 = 1 - 2x + x^2$ montrer que :

$$1 - 4x + 8x^2 - 10x^3 + 4x^4 = (1 - 2x + x^2) \times (1 - 2x + 3x^2) + (-2x^3 + x^4). \quad (\text{XIX.4})$$

5. En déduire A, B et C.
6. Terminer la décomposition.

Correction :

1. La division suivant les puissances décroissantes donne : $\Phi = 2 + \Phi_1$ avec

$$\Phi_1 = \frac{4x^4 - 10x^3 + 8x^2 - 4x + 1}{x^3(x-1)^2}.$$

2. La décomposition (XIX.2) s'écrit :

$$\Phi_1 = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{x-1}.$$

3. La méthode de l'exercice précédent permettrait d'obtenir facilement A et D par multiplication par x^3 et par $(x-1)^2$, mais il resterait encore 3 coefficients à déterminer.
4. La division suivant les puissances croissantes, à l'ordre 3 (qui est l'exposant du facteur x) du numérateur $1 - 4x + 8x^2 - 10x^3 + 4x^4$ par $(x-1)^2$, ou plutôt par $1 - 2x + x^2$ s'écrit

$$1 - 4x + 8x^2 - 10x^3 + 4x^4 = (1 - 2x + x^2) \times (1 - 2x + 3x^2) + (-2x^3 + x^4). \quad (\text{XIX.5})$$

5. En divisant les deux membres de (XIX.5) par $x^3(x-1)^2$, on obtient A, B et C d'un seul coup :

$$\Phi_1 = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} + \frac{x-2}{(x-1)^2}.$$

6. Le calcul de D et E est alors immédiat par décomposition de $\frac{x-2}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}$.

En conclusion,

$$\frac{2x^5 - 8x^3 + 8x^2 - 4x + 1}{x^3(x-1)^2} = 2 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}.$$

Remarque : Cette méthode est efficace pour un exposant assez grand (en gros à partir de 3). Elle peut être utilisée pour une fraction du type $\frac{P(x)}{(x-a)^n Q(x)}$, mais il faut commencer par le changement de variable $u = x - a$ avant de faire la division, puis bien entendu revenir ensuite à la variable x .

Exercice 25 : Décomposition en éléments simples guidée :

$$\Phi = \frac{4x^6 - 2x^5 + 11x^4 - x^3 + 11x^2 + 2x + 3}{x(x^2 + 1)^3}.$$

1. En vous aidant de (XIX.2), donner la décomposition générale de Φ .
2. Montrer que $\Phi - \frac{3}{x} = \Phi_1$ où $\Phi_1 = \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 2}{(x^2 + 1)^3}$.
3. En divisant successivement suivant les puissances décroissantes le numérateur de Φ_1 par $x^2 + 1$, puis le quotient obtenu par $x^2 + 1$, donner la décomposition en éléments simples de Φ_1 .
4. Donner la décomposition en éléments simples de Φ .

Correction :

1. Pas de division préliminaire dans ce cas... Forme de la décomposition :

$$\Phi = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 1)^3} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Fx + G}{x^2 + 1}. \quad (\text{XIX.6})$$

2. **Remarque :** La méthode du premier exercice permet d'obtenir A, puis B et C (pour ces derniers : multiplication des deux membres de (XIX.6) par $x^2 + 1$, puis limite quand x tend vers i ou vers $-i$, avec séparation des parties réelle et imaginaire), mais c'est bien insuffisant pour conclure : il faut encore soustraire $\frac{Bx + C}{(x^2 + 1)^3}$, simplifier par $x^2 + 1$, calculer D et E...

On va ici se contenter de trouver A ($A = 3$), puis faire la soustraction $\Phi_1 = \Phi - \frac{A}{x}$. Sauf erreur de calcul, la fraction Φ_1 doit se simplifier par x .

On trouve :

$$\Phi = \frac{3}{x} + \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 2}{(x^2 + 1)^3}.$$

3. La fin de la décomposition se fait par divisions successives suivant les puissances décroissantes : division du numérateur $x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 2$ par $x^2 + 1$, puis du quotient obtenu par $x^2 + 1$.

$$\Phi_1 = \frac{x+1}{(x^2+1)^3} + \frac{3}{(x^2+1)^2} + \frac{x-2}{x^2+1}.$$

Finalement,

$$\Phi = \frac{3}{x} + \frac{x+1}{(x^2+1)^3} + \frac{3}{(x^2+1)^2} + \frac{x-2}{x^2+1}.$$

Remarque : Cette méthode des divisions successives est très pratique quand la fraction à décomposer a un dénominateur *simple*, c'est à dire comportant un dénominateur du type Q^n où Q est du premier degré, ou du second degré sans racine réelle.

Exercice 26 : Décomposer en éléments simples

1. $\frac{X^3 - 3X^2 + X - 4}{X - 1}$ sur $\mathbb{R}$.
2. $\frac{2X^3 + X^2 - X + 1}{X^2 - 3X + 2}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $\frac{2X^3 + X^2 - X + 1}{X^2 - 2X + 1}$ sur $\mathbb{R}$.
4. $\frac{X^4 + 2X^2 + 1}{X^2 - 1}$ sur $\mathbb{R}$.
5. $\frac{X}{X^2 - 4}$ sur $\mathbb{R}$.
6. $\frac{X^5 + X^4 + 1}{X^3 - X}$ sur $\mathbb{R}$.
7. $\frac{X^5 + X^4 + 1}{X(X-1)^4}$ sur $\mathbb{R}$.
8. $\frac{X^5 + X^4 + 1}{(X-1)^3(X+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$.
9. $\frac{X^7 + 3}{(X^2 + X + 2)^3}$ sur $\mathbb{R}$.
10. $\frac{(3-2i)X - 5 + 3i}{X^2 + iX + 2}$ sur $\mathbb{C}$.
11. $\frac{X+i}{X^2+i}$ sur $\mathbb{C}$.
12. $\frac{X}{(X+i)^2}$ sur $\mathbb{C}$.
13. $\frac{X^2+1}{X^4+1}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
14. $\frac{X}{X^4+1}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
15. $\frac{X^2+X+1}{X^4+1}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
16. $\frac{X^5+X+1}{X^4-1}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
17. $\frac{X^5+X+1}{X^6-1}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
18. $\frac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
19. $\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
20. $\frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)}$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

Correction :

1. $\frac{X^3 - 3X^2 + X - 4}{X - 1} = X^2 - 2X - 1 - \frac{5}{X-1}.$
2. $\frac{2X^3 + X^2 - X + 1}{X^2 - 3X + 2} = 2X + 7 - \frac{3}{X-1} + \frac{19}{X-2}.$
3. $\frac{2X^3 + X^2 - X + 1}{X^2 - 2X + 1} = 2X + 5 + \frac{3}{(X-1)^2} + \frac{7}{X-1}.$
4. $\frac{X^4 + 2X^2 + 1}{X^2 - 1} = X^2 + 3 + \frac{2}{X-1} - \frac{2}{X+1}.$
5. $\frac{X}{X^2 - 4} = \frac{1/2}{X+2} + \frac{1/2}{X-2}.$

6. $\frac{X^5 + X^4 + 1}{X^3 - X} = X^2 + X + 1 - \frac{1}{X} + \frac{1/2}{X+1} + \frac{3/2}{X-1}$.
7. $\frac{X^5 + X^4 + 1}{X(X-1)^4} = 1 + \frac{1}{X} + \frac{3}{(X-1)^4} + \frac{6}{(X-1)^3} + \frac{10}{(X-1)^2} + \frac{4}{X-1}$.
8. $\frac{X^5 + X^4 + 1}{(X-1)^3(X+1)^2} = 1 + \frac{3/4}{(X-1)^3} + \frac{3/2}{(X-1)^2} + \frac{37/16}{X-1} - \frac{1/8}{(X+1)^2} - \frac{5/16}{X+1}$.
9. $\frac{X^7 + 3}{(X^2 + X + 2)^3} = X - 3 + \frac{7X + 13}{(X^2 + X + 2)^3} - \frac{7X + 21}{(X^2 + X + 2)^2} + \frac{14}{X^2 + X + 2}$.
10. $\frac{(3-2i)X - 5 + 3i}{X^2 + iX + 2} = \frac{2+i}{X-i} + \frac{1-3i}{X+2i}$.
11. $\frac{X+i}{X^2+i} = \frac{-\frac{\sqrt{2}+2}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i}{X - \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{2}+2}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i}{X - \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}}$.
12. $\frac{X}{(X+i)^2} = \frac{1}{X+i} - \frac{i}{(X+i)^2}$.
13. $\frac{X^2+1}{X^4+1} = \frac{1/2}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{1/2}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i} + \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}$.
14. $\frac{X}{X^4+1} = -\frac{\sqrt{2}/4}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{\sqrt{2}/4}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \frac{-\frac{1}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i} + \frac{\frac{1}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i} + \frac{-\frac{1}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i} + \frac{\frac{1}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}$.
15. $\frac{X^2+X+1}{X^4+1} = \frac{(2-\sqrt{2})/4}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{(2+\sqrt{2})/4}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \frac{-\frac{1+\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i} + \frac{\frac{1+\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i} + \frac{-\frac{1-\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i} + \frac{\frac{1-\sqrt{2}}{4}}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}$.
16. $\frac{X^5+X+1}{X^4-1} = X + \frac{3/4}{X-1} + \frac{1/4}{X+1} - \frac{X+1/2}{X^2+1} = X + \frac{3/4}{X-1} + \frac{1/4}{X+1} + \frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i}{X-i} + \frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i}{X+i}$.
17. $\frac{X^5+X+1}{X^6-1} = \frac{1/2}{X-1} + \frac{1/6}{X+1} + \frac{\frac{1}{3}X-\frac{2}{3}}{X^2-X+1} = \frac{1/2}{X-1} + \frac{1/6}{X+1} - \frac{\frac{1}{3}j}{X+j} - \frac{\frac{1}{3}j^2}{X+j^2}$, où on a posé de façon standard $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
18. $\frac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2} = -\frac{2}{X^4} + \frac{4}{X^3} - \frac{2}{X^2} - \frac{3}{X} + \frac{X+1}{(X^2+X+1)^2} + \frac{3X+5}{X^2+X+1} = -\frac{2}{X^4} + \frac{4}{X^3} - \frac{2}{X^2} - \frac{3}{X} + \frac{\frac{1}{3}j^2}{(X-j)^2} + \frac{\frac{1}{3}j}{(X-j^2)^2} + \frac{\frac{3}{2} - \frac{23\sqrt{3}}{18}i}{X-j} + \frac{\frac{3}{2} + \frac{23\sqrt{3}}{18}i}{X-j^2}$, où on a posé de façon standard $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
19. $\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)} = \frac{\frac{1}{3}X}{X^2+1} - \frac{\frac{1}{3}X}{X^2+4} = \frac{1/6}{X-i} + \frac{1/6}{X+i} - \frac{1/6}{X-2i} - \frac{1/6}{X+2i}$.
20. $\frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)} = -\frac{4/3}{X^2+1} + \frac{7/3}{X^2+4} = \frac{\frac{2}{3}i}{X-i} + \frac{-\frac{2}{3}i}{X+i} + \frac{-\frac{7}{12}i}{X-2i} + \frac{\frac{7}{12}i}{X+2i}$.

Exercice 27 : Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

1. $\frac{X^2 + 3X + 5}{X^2 - 3X + 2}$
2. $\frac{X^2 + 1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$
3. $\frac{1}{X(X-1)^2}$
4. $\frac{X^2 + 1}{(X-1)^2(X+1)^2}$
5. $\frac{1}{(X-2)^3(X+2)^3}$
6. $\frac{X^6}{(X^3-1)^2}$
7. $\frac{1}{X^6+1}$
8. $\frac{X^2+3}{X^5-3X^4+5X^3-7X^2+6X-2}$
9. $\frac{X}{(X^2+1)^3(X^2-1)}$
10. $\frac{X^6+1}{X^5-X^4+X^3-X^2+X-1}$
11. $\frac{X^7+1}{(X^2+X+1)^3}$
12. $\frac{X^2+1}{X(X-1)^4(X^2-2)^2}$
13. $\frac{1}{(X+1)^7-X^7-1}$
14. $\frac{1}{X^n-1}$
15. $\frac{1}{(X-1)(X^n-1)}$
16. $\frac{n!}{(X-1)(X-2)\dots(X-n)}$
17. $\frac{X^2}{X^4-2X^2\cos(2a)+1}$
18. $\frac{1}{X^{2n}+1}$

Correction :

1. Soit $F = \frac{X^2 + 3X + 5}{X^2 - 3X + 2} = \frac{X^2 + 3X + 5}{(X-1)(X-2)}$.

1 et 2 ne sont pas racines du polynôme $X^2 + 3X + 5$ et donc, F est bien sous forme irréductible. La partie entière de F étant clairement 1, F s'écrit sous la forme :

$$F = 1 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2},$$

où a et b sont deux réels.

$$a = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)F(x) = \frac{1+3+5}{1-2} = -9 \text{ et } b = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)F(x) = \frac{4+6+5}{2-1} = 15. \text{ Donc,}$$

$$F = 1 - \frac{9}{X-1} + \frac{15}{X-2}.$$

2. Soit $F = \frac{X^2 + 1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$. La décomposition en éléments simples de F s'écrit sous la forme :

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X-3},$$

où a , b et c sont trois réels.

$$a = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)F(x) = \frac{1+1}{(1-2)(1-3)} = 1, \text{ puis } b = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)F(x) = \frac{4+1}{(2-1)(2-3)} = -5 \text{ et}$$

$$c = \lim_{x \rightarrow 3} (x-3)F(x) = \frac{9+1}{(3-1)(3-2)} = 5. \text{ Donc,}$$

$$F = \frac{1}{X-1} - \frac{5}{X-2} + \frac{5}{X-3}.$$

3. Soit $F = \frac{1}{X(X-1)^2}$.

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2},$$

avec

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} xF(x) = 1 \text{ et } c = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 F(x) = 1. \text{ Enfin, } x = -1 \text{ fournit } -1 - \frac{b}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \text{ et donc } b = -1.$$

Pour trouver b , on peut aussi écrire (le meilleur) $0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = a + b$ et donc que $b = -a = -1$.

On peut encore écrire (le moins bon ici)

$$\frac{1}{X(X-1)^2} - \frac{1}{X} - \frac{1}{(X-1)^2} = \frac{1 - (X-1)^2 - X}{X(X-1)^2} = \frac{-X^2 + X}{X(X-1)^2} = -\frac{1}{X-1}.$$

Donc,

$$F = \frac{1}{X} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}.$$

Autre démarche.

$$\begin{aligned} \frac{1}{X(X-1)^2} &= \frac{X-1-X}{X(X-1)^2} = \frac{1}{X(X-1)} - \frac{1}{(X-1)^2} = \frac{X-1-X}{X(X-1)} - \frac{1}{(X-1)^2} \\ &= \frac{1}{X} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}. \end{aligned}$$

4. Soit $F = \frac{X^2+1}{(X-1)^2(X+1)^2}$. Puisque F est paire, la décomposition en éléments simples de F est de la forme :

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} - \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2}.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 F(x) = \frac{1}{2} \text{ puis, } x = 0 \text{ fournit } -2a + 2b = 1 \text{ et donc } a = 0.$$

$$F = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{(X+1)^2} \right).$$

5. Soit $F = \frac{1}{(X-2)^3(X+2)^3}$. Puisque F est paire, la décomposition en éléments simples de F est de la forme :

$$F = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{(X-2)^2} + \frac{c}{(X-2)^3} - \frac{a}{X+2} + \frac{b}{(X+2)^2} - \frac{c}{(X+2)^3}.$$

$$c = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^3 F(x) = \frac{1}{64} \text{ puis,}$$

$$\begin{aligned} F - \frac{1}{64} \left(\frac{1}{(X-2)^3} - \frac{1}{(X+2)^3} \right) &= \frac{64 - (X+2)^3 + (X-2)^3}{64(X-2)^3(X+2)^3} = \frac{-12X^2 + 48}{64(X-2)^3(X+2)^3} \\ &= -\frac{3}{16} \frac{X^2 - 4}{(X-2)^3(X+2)^3} = -\frac{3}{16} \frac{1}{(X-2)^2(X+2)^2} \end{aligned}$$

Puis, $b = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 (F(x) - \frac{1}{64} (\frac{1}{(x-2)^3} - \frac{1}{(x+2)^3})) = -\frac{3}{16} \frac{1}{(2+2)^2} = -\frac{3}{256}$. Enfin, $x = 0$ fournit $-\frac{1}{64} = -a - \frac{3}{512} - \frac{1}{256}$ et $a = \frac{1}{64} - \frac{5}{512} = \frac{3}{512}$. Donc,

$$F = \frac{1}{512} \left(\frac{3}{X-2} - \frac{6}{(X-2)^2} + \frac{8}{(X-2)^3} - \frac{3}{X+2} - \frac{6}{(X+2)^2} - \frac{8}{(X+2)^3} \right).$$

6. Soit $F = \frac{X^6}{(X^3-1)^2}$. On a déjà $(X^3-1)^2 = (X-1)^2(X-j)^2(X-j^2)^2$. Puisque F est réelle, la décomposition en éléments simples de F s'écrit

$$F = 1 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-j} + \frac{d}{(X-j)^2} + \frac{\bar{c}}{X-j^2} + \frac{\bar{d}}{(X-j^2)^2}.$$

$$b = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 F(z) = \frac{1}{9} \text{ et}$$

$$\begin{aligned} d &= \lim_{z \rightarrow j} (z-j)^2 F(z) = \frac{j^6}{(j-1)^2(j-j^2)^2} = \frac{1}{j^2(j-1)^4} = \frac{1}{j^2(j^2-2j+1)^2} \\ &= \frac{1}{j^2(-3j)^2} = \frac{j^2}{9} \end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{j^2}{(X-j)^2} + \frac{j}{(X-j^2)^2} &= \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{(j+j^2)X^2 - 2(j+j^2)X + 2}{(X-j)^2(X-j^2)} \\ &= \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{-X^2 + 2X + 2}{(X-j)^2(X-j^2)} = \frac{(X^2 + X + 1)^2 + (X-1)^2(-X^2 + 2X + 2)}{(X^3-1)^2} \\ &= \frac{6X^3 + 3}{(X^3-1)^2} \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} F - 1 - \frac{1}{9} \left(\frac{1}{(X-1)^2} + \frac{j^2}{(X-j)^2} + \frac{j}{(X-j^2)^2} \right) &= \frac{X^6}{(X^3-1)^2} - 1 - \frac{2X^3 + 1}{3(X^3-1)^2} \\ &= \frac{3X^6 - 3(X^3-1)^2 - 2X^3 - 1}{3(X^3-1)^2} = \frac{4X^3 - 4}{3(X^3-1)^2} \\ &= \frac{4}{3} \frac{1}{X^3-1}. \end{aligned}$$

Mais alors, $a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)(F(z) - 1 - \frac{1}{9}(\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{j^2}{(z-j)^2} + \frac{j}{(z-j^2)^2})) = \frac{4}{3} \frac{1}{1+1+1} = \frac{4}{9}$. De même,

$$c = \lim_{z \rightarrow j} (z-j)(F(z) - 1 - \frac{1}{9}(\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{j^2}{(z-j)^2} + \frac{j}{(z-j^2)^2})) = \frac{4}{3} \frac{1}{(j-1)(j-j^2)} = \frac{4j^2}{9}.$$

Donc,

$$F = 1 + \frac{1}{9} \left(\frac{4}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{4j^2}{X-j} + \frac{j^2}{(X-j)^2} + \frac{4j}{X-j^2} + \frac{j}{(X-j^2)^2} \right).$$

Si on veut la décomposition sur $\mathbb{R}$, on peut regrouper les conjugués :

$$\begin{aligned} F &= 1 + \frac{1}{9} \left(\frac{4}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{4j^2(X-j^2) + 4j(X-j)}{X^2 + X + 1} + \frac{j^2(X-j^2)^2 + j(X-j)^2}{(X^2 + X + 1)^2} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{9} \left(\frac{4}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{-4X+4}{X^2 + X + 1} + \frac{-X^2 + 2X + 2}{(X^2 + X + 1)^2} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{9} \left(\frac{4}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{-4X+4}{X^2 + X + 1} + \frac{-X^2 - X - 1 + 3X + 3}{(X^2 + X + 1)^2} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{9} \left(\frac{4}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{-4X+3}{X^2 + X + 1} + \frac{3X+3}{(X^2 + X + 1)^2} \right) \end{aligned}$$

7. Soit $F = \frac{1}{X^6 + 1}$.

$$F = \sum_{k=0}^5 \frac{\lambda_k}{X - \omega_k},$$

où $\omega_k = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6})}$. Mais,

$$\lambda_k = \frac{1}{6\omega_k^5} = \frac{\omega_k}{6\omega_k^6} = -\frac{\omega_k}{6}.$$

Donc,

$$\frac{1}{X^6 + 1} = \frac{1}{6} \left(-\frac{i}{X-i} + \frac{i}{X+i} - \frac{e^{i\pi/6}}{X - e^{i\pi/6}} - \frac{e^{-i\pi/6}}{X - e^{-i\pi/6}} + \frac{e^{i\pi/6}}{X + e^{i\pi/6}} + \frac{e^{-i\pi/6}}{X + e^{-i\pi/6}} \right).$$

8. Soit $F = \frac{X^2 + 3}{X^5 - 3X^4 + 5X^3 - 7X^2 + 6X - 2}$.

$$\begin{aligned} X^5 - 3X^4 + 5X^3 - 7X^2 + 6X - 2 &= (X-1)(X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 4X + 2) = (X-1)^2(X^3 - X^2 + 2X - 2) \\ &= (X-1)^2(X^2(X-1) + 2(X-1)) = (X-1)^3(X^2 + 2). \end{aligned}$$

La décomposition en éléments simples de F est donc de la forme

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X-1)^3} + \frac{d}{X-i\sqrt{2}} + \frac{\bar{d}}{X+i\sqrt{2}}.$$

Puis,

$$\begin{aligned} d &= \lim_{z \rightarrow i\sqrt{2}} (z - i\sqrt{2})F(z) = \frac{(i\sqrt{2})^2 + 3}{(i\sqrt{2} - 1)^3(i\sqrt{2} + i\sqrt{2})} = \frac{1}{(2i\sqrt{2})(-2i\sqrt{2} + 6 + 3i\sqrt{2} - 1)} = \frac{1}{-4 + 10i\sqrt{2}} \\ &= -\frac{2 + 5i\sqrt{2}}{108}. \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\frac{d}{X-i\sqrt{2}} + \frac{\bar{d}}{X+i\sqrt{2}} = -\frac{1}{108} \frac{(2+5i\sqrt{2})(X+i\sqrt{2}) + (2-5i\sqrt{2})(X-i\sqrt{2})}{X^2+2} = -\frac{1}{108} \frac{4X-20}{X^2+2} = \frac{-X+5}{27(X^2+2)}.$$

Mais alors,

$$\begin{aligned} \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X-1)^3} &= \frac{X^2+3}{(X-1)^3(X^2+2)} - \frac{-X+5}{27(X^2+2)} \\ &= \frac{27(X^2+3) - (-X+5)(X-1)^3}{27(X-1)^3(X^2+2)} = \frac{X^4 - 8X^3 + 45X^2 - 16X + 86}{27(X-1)^3(X^2+2)} \\ &= \frac{(X^2+2)(X^2-8X+43)}{27(X-1)^3(X^2+2)} = \frac{X^2-8X+43}{27(X-1)^3} \\ &= \frac{X^2-2X+1-6X+6+36}{27(X-1)^3} \\ &= \frac{1}{27} \left(\frac{1}{X-1} - 6 \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{36}{(X-1)^3} \right). \end{aligned}$$

Finalement,

$$F = \frac{1}{27} \left(\frac{1}{X-1} - 6 \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{36}{(X-1)^3} \right) - \frac{1}{108} \left(\frac{2+5i\sqrt{2}}{X-i\sqrt{2}} + \frac{2-5i\sqrt{2}}{X+i\sqrt{2}} \right).$$

9. Soit $F = \frac{X}{(X^2+1)^3(X^2-1)}$. Puisque F est réelle et impaire, la décomposition en éléments simples de F est de la forme

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-i} + \frac{c}{(X-i)^2} + \frac{d}{(X-i)^3} + \frac{\bar{b}}{X+i} + \frac{\bar{c}}{(X+i)^2} + \frac{\bar{d}}{(X+i)^3}.$$

$$a = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)F(x) = \frac{1}{(1+1)^3(1+1)} = \frac{1}{16}. \text{ Puis,}$$

$$\begin{aligned} F - \frac{1}{16} \left(\frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1} \right) &= \frac{8X - X(X^2 + 1)^3}{8(X^2 + 1)^3(X^2 - 1)} = \frac{-X^7 - 3X^5 - 3X^3 + 7X}{8(X^2 + 1)^3(X^2 - 1)} \\ &= \frac{X(X^2 - 1)(-X^4 - 4X^2 - 7)}{8(X^2 + 1)^3(X^2 - 1)} = -\frac{1}{8} \frac{X^4 + 4X^2 + 7}{(X^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

Mais alors,

$$\begin{aligned} d &= \lim_{x \rightarrow i} (x - i)^3 F(x) = \lim_{x \rightarrow i} (x - i)^3 \left(F(x) - \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{8} \frac{i^4 + 4i^2 + 7}{(i + i)^3} = -\frac{i}{16} \end{aligned}$$

Puis,

$$-\frac{1}{8} \frac{X^4 + 4X^2 + 7}{(X^2 + 1)^3} + \frac{i}{16} \frac{1}{(X - i)^3} - \frac{i}{16} \frac{1}{(X + i)^3} = -\frac{1}{8} \frac{X^4 + 4X^2 + 7}{(X^2 + 1)^3} + \frac{1}{8} \frac{3X^2 - 1}{(X^2 + 1)^3} = \frac{X^2 + 6}{8(X^2 + 1)^2}.$$

Ensuite, $c = \frac{i^2 + 6}{8(i + i)^2} = -\frac{5}{32}$. Puis,

$$\frac{X^2 + 6}{8(X^2 + 1)^2} + \frac{5}{32} \left(\frac{1}{(X - i)^2} + \frac{1}{(X + i)^2} \right) = \frac{2(X^2 + 6) + 5(X^2 - 1)}{16(X^2 + 1)^2} = \frac{7}{16(X^2 + 1)}.$$

Enfin, $b = \frac{7}{16(i + i)} = -\frac{7i}{32}$. Finalement,

$$F = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1} \right) - \frac{7i}{32} \left(\frac{1}{X-i} - \frac{1}{X+i} \right) - \frac{5}{32} \left(\frac{1}{(X-i)^2} + \frac{1}{(X+i)^2} \right) - \frac{i}{16} \left(\frac{1}{(X-i)^3} - \frac{1}{(X+i)^3} \right).$$

10. Soit $F = \frac{X^6 + 1}{X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + X - 1}$.

$$\begin{aligned} X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + X - 1 &= X^4(X - 1) + X^2(X - 1) + (X - 1) = (X - 1)((X^4 + 2X^2 + 1) - X^2) \\ &= (X - 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1) \\ &= (X - 1)(X - j)(X - j^2)(X + j)(X + j^2). \end{aligned}$$

Puisque F est réelle, la décomposition en éléments simples de F est de la forme

$$F = aX + b + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{X-j} + \frac{\bar{d}}{X-j^2} + \frac{e}{X+j} + \frac{\bar{e}}{X+j^2}.$$

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 1, \text{ puis } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 \dots}{x^5 \dots} = 1. \text{ Puis,} \\ c &= \frac{1^6 + 1}{5 - 4 + 3 - 2 + 1} = \frac{2}{3}, \quad d = \frac{j^6 + 1}{5j^4 - 4j^3 + 3j^2 - 2j + 1} = \frac{2}{3j^2 + 3j - 3} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3} \text{ et} \\ e &= \frac{(-j)^6 + 1}{5j^4 + 4j^3 + 3j^2 + 2j + 1} = \frac{2}{3j^2 + 7j + 5} = \frac{1}{2j + 1}. \text{ Donc,} \end{aligned}$$

$$F = X + 1 + \frac{2}{3} \frac{1}{X-1} - \frac{1}{3} \frac{1}{X-j} - \frac{1}{3} \frac{1}{X-j^2} + \frac{1}{2j+1} \frac{1}{X+j} + \frac{1}{2j^2+1} \frac{1}{X-j^2}.$$

11. Soit $F = \frac{X^7 + 1}{(X^2 + X + 1)^3}$.

La décomposition sur $\mathbb{R}$ (hors programme) s'obtiendrait de la façon suivante

$$\begin{aligned} X^7 + 1 &= (X^2 + X + 1)(X^5 - X^4 + X^2 - X) + X + 1 \\ &= (X^2 + X + 1)[(X^2 + X + 1)(X^3 - 2X^2 + X + 2) - 4X - 2] + X + 1 \\ &= (X^2 + X + 1)^2(X^3 - 2X^2 + X + 2) - (4X + 2)(X^2 + X + 1) + X + 1 \\ &= (X^2 + X + 1)^2[(X^2 + X + 1)(X - 3) + 3X + 5] - (4X + 2)(X^2 + X + 1) + X + 1 \\ &= X + 1 - (4X + 2)(X^2 + X + 1) + (3X + 5)(X^2 + X + 1)^2 + (X - 3)(X^2 + X + 1)^3 \end{aligned}$$

Donc,

$$F = X - 3 + \frac{3X + 5}{X^2 + X + 1} - \frac{4X + 2}{(X^2 + X + 1)^2} + \frac{X + 1}{(X^2 + X + 1)^3}.$$

12. Soit $F = \frac{X^2 + 1}{X(X-1)^4(X^2-2)^2}$. La décomposition de F en éléments simples est de la forme

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b_1}{X-1} + \frac{b_2}{(X-1)^2} + \frac{b_3}{(X-1)^3} + \frac{b_4}{(X-1)^4} + \frac{c_1}{X-\sqrt{2}} + \frac{c_2}{(X-\sqrt{2})^2} + \frac{d_1}{X+\sqrt{2}} + \frac{d_2}{(X+\sqrt{2})^2}.$$

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} xF(x) = \frac{1}{4}. \text{ Puis,}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (x - \sqrt{2})^2 F(x) = \frac{2+1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^4(\sqrt{2}+\sqrt{2})^2} = \frac{3}{8\sqrt{2}(4-8\sqrt{2}+12-4\sqrt{2}+1)} \\ &= \frac{3}{8\sqrt{2}(17-12\sqrt{2})} = \frac{3}{8(-24+17\sqrt{2})} = \frac{3}{16}(24+17\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Un calcul conjugué fournit $d_2 = \frac{3}{16}(24-17\sqrt{2})$. On a ensuite

$$\frac{3}{16} \left(\frac{24+17\sqrt{2}}{(X-\sqrt{2})^2} + \frac{24-17\sqrt{2}}{(X+\sqrt{2})^2} \right) = \frac{3}{2} \frac{6X^2 + 17X + 12}{(X^2-2)^2}.$$

Puis,

$$\begin{aligned} F - \frac{3}{2} \frac{6X^2 + 17X + 12}{(X^2-2)^2} &= \frac{2(X^2+1) - 3(6X^2+17X+12)X(X-1)^4}{2X(X-1)^4(X^2-2)^2} \\ &= \frac{-18X^7 + 21X^6 + 60X^5 - 90X^4 - 30X^3 + 95X^2 - 36X + 2}{2X(X-1)^4(X^2-2)^2} \\ &= \frac{-18X^5 + 21X^4 + 24X^3 - 48X^2 + 18X - 1}{2X(X-1)^4(X^2-2)} \end{aligned}$$

Mais alors,

$$c_1 = \frac{-18.4\sqrt{2} + 21.4 + 24.2\sqrt{2} - 48.2 + 18\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^4(\sqrt{2}+\sqrt{2})} = \frac{-13 - 6\sqrt{2}}{8(17 - 12\sqrt{2})} = -\frac{1}{8}(365 + 258\sqrt{2}),$$

et par un calcul conjugué, $d_1 = -\frac{1}{8}(365 - 258\sqrt{2})$. Ensuite,

$$-\frac{1}{8}\left(\frac{365 + 258\sqrt{2}}{X - \sqrt{2}} + \frac{365 - 258\sqrt{2}}{X + \sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{4}\frac{365X + 516}{X^2 - 2}.$$

Puis,

$$\begin{aligned} F - \frac{36X^2 + 17X + 12}{2(X^2 - 2)^2} + \frac{1}{4}\frac{365X + 516}{X^2 - 2} &= \frac{-18X^5 + 21X^4 + 24X^3 - 48X^2 + 18X - 1}{2X(X-1)^4(X^2-2)} + \frac{365X + 516}{4(X^2-2)} \\ &= \frac{2(-18X^5 + 21X^4 + 24X^3 - 48X^2 + 18X - 1) + (365X + 516)X(X-1)^4}{4X(X-1)^4(X^2-2)} \\ &= \frac{365X^6 - 980X^5 + 168X^4 + 1684X^3 - 1795X^2 + 552X - 2}{4X(X-1)^4(X^2-2)} \\ &= \frac{365X^4 - 980X^3 + 898X^2 - 276X + 1}{4X(X-1)^4} \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} F - \frac{36X^2 + 17X + 12}{2(X^2 - 2)^2} + \frac{1}{4}\frac{365X + 516}{X^2 - 2} - \frac{1}{4X} &= \frac{365X^4 - 980X^3 + 898X^2 - 276X + 1}{4X(X-1)^4} - \frac{1}{4X} \\ &= \frac{(365X^4 - 980X^3 + 898X^2 - 276X + 1) - (X-1)^4}{4X(X-1)^4} = \frac{364X^4 - 976X^3 + 892X^2 - 272X}{4X(X-1)^4} \\ &= \frac{182X^3 - 488X^2 + 446X - 136}{2(X-1)^4} \end{aligned}$$

Enfin, $b_4 = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^4 \frac{182x^3 - 488x^2 + 446x - 136}{2(x-1)^4} = 2$, puis

$$\frac{182X^3 - 488X^2 + 446X - 136}{2(X-1)^4} - \frac{2}{(X-1)^4} = \frac{91X^3 - 244X^2 + 223X - 70}{(X-1)^4} = \frac{91X^2 - 153X + 70}{(X-1)^3}.$$

Puis, $b_3 = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^3 \frac{91x^2 - 153x + 70}{(x-1)^3} = 8$, puis

$$\begin{aligned} \frac{91X^2 - 153X + 70}{(X-1)^3} - \frac{8}{(X-1)^3} &= \frac{91X^2 - 153X + 62}{(X-1)^3} = \frac{91X - 62}{(X-1)^2} \\ &= \frac{91X - 91 + 29}{(X-1)^2} = \frac{91}{X-1} + \frac{29}{(X-1)^2} \end{aligned}$$

ce qui fournit $b_2 = 29$ et $b_1 = 91$.

$$F = \frac{1}{4X} + \frac{91}{X-1} + \frac{29}{(X-1)^2} + \frac{8}{(X-1)^3} + \frac{2}{(X-1)^4} - \frac{365 + 258\sqrt{2}}{8} \frac{1}{X-\sqrt{2}} + \frac{3(24 + 17\sqrt{2})}{16} \frac{1}{(X-\sqrt{2})^2} \\ - \frac{365 - 258\sqrt{2}}{8} \frac{1}{X+\sqrt{2}} + \frac{3(24 - 17\sqrt{2})}{16} \frac{1}{(X+\sqrt{2})^2}.$$

13. Soit $F = \frac{1}{(X+1)^7 - X^7 - 1}$.

$$(X+1)^7 - X^7 - 1 = 7X^6 + 21X^5 + 35X^4 + 35X^3 + 21X^2 + 7X = 7X(X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 5X^2 + 3X + 1) \\ = 7X(X+1)(X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1) = 7X(X+1)(X^2 + X + 1)^2$$

Si on n'a pas deviné que $X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = (X^2 + X + 1)^2$ (par exemple, en repérant que j est racine ou encore en manipulant l'identité $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$), on peut pratiquer comme suit

$$X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = X^2(X^2 + \frac{1}{X^2} + 2(X + \frac{1}{X}) + 3) = X^2((X + \frac{1}{X})^2 + 2(X + \frac{1}{X}) + 1) \\ = X^2(X + \frac{1}{X} + 1)^2 = (X^2 + X + 1)^2$$

La décomposition en éléments simples de $7F$ est donc de la forme

$$7F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-j} + \frac{d}{(X-j)^2} + \frac{\bar{c}}{X-j^2} + \frac{\bar{d}}{(X-j^2)^2}.$$

$$a = \frac{1}{(0+1)(0^2+0+1)^2} = 1 \text{ et } b = \frac{1}{(-1)(1-1+1)^2} = -1. \text{ Puis,}$$

$$d = \frac{1}{j(j+1)(j-j^2)^2} = \frac{1}{j(-j^2)j^2(1-2j+j^2)} = \frac{1}{-j^2(-3j)} = \frac{1}{3}.$$

Ensuite,

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{(X-j)^2} + \frac{1}{(X-j^2)^2} \right) = \frac{(X-j^2)^2 + (X-j)^2}{3(X^2+X+1)^2} = \frac{2X^2+2X-1}{3(X^2+X+1)^2}.$$

Puis,

$$7F - \frac{2X^2+2X-1}{3(X^2+X+1)^2} = \frac{3-X(X+1)(2X^2+2X-1)}{3X(X+1)(X^2+X+1)^2} = \frac{-2X^4-4X^3-4X^2+X+3}{3X(X+1)(X^2+X+1)^2} \\ = \frac{-2X^2-2X+3}{3X(X+1)(X^2+X+1)}.$$

Mais alors,

$$c = \frac{-2j^2 - 2j + 3}{3j(j+1)(j-j^2)} = \frac{5}{-3(j-j^2)} = \frac{5i}{3\sqrt{3}}.$$

Finalement,

$$F = \frac{1}{7} \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X+1} + \frac{5i}{3\sqrt{3}(X-j)} + \frac{3}{3(X-j)^2} - \frac{5i}{3\sqrt{3}(X-j^2)} + \frac{1}{3(X-j^2)^2} \right).$$

14. Soit $P = X^n - 1$ et $F = \frac{1}{P}$. La partie entière de F est nulle et les pôles de F sont simples (car $P = X^n - 1$ et $P' = nX^{n-1}$ n'ont pas de racines communes dans $\mathcal{C}$). De plus, $P = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k)$

où $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$. Donc, $F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X - \omega_k}$ où

$$\lambda_k = \frac{1}{P'(\omega_k)} = \frac{1}{n\omega_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n\omega_k^n} = \frac{\omega_k}{n}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{2ik\pi/n}}{X - e^{2ik\pi/n}}.$$

15. Soit $P = (X-1)(X^n - 1) = (X-1)^2 \prod_{k=1}^{n-1} \omega_k$ où $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$. Soit $F = \frac{1}{P}$. La partie entière de F est nulle. D'autre part, F admet un pôle double, à savoir 1 et $n-1$ pôles simples à savoir les $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$, $\leq k \leq n-1$. Donc,

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X - \omega_k}.$$

$$\lambda_k = \frac{1}{(n+1)\omega_k^n - n\omega_k^{n-1} - 1} = \frac{1}{n(1 - \omega_k^{n-1})} = \frac{\omega_k}{n(\omega_k - 1)}. \text{ Ensuite,}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 F(x) = \frac{1}{1^{n-1} + \dots + 1^1 + 1} = \frac{1}{n}.$$

Il reste à calculer a .

$$F - \frac{1}{n(X-1)^2} = \frac{n - (X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1)}{n(X-1)^2(X^{n-1} + \dots + X + 1)} = \frac{-X^{n-2} - 2X^{n-3} - \dots - (n-2)X - (n-1)}{n(X-1)(X^{n-1} + \dots + X + 1)}.$$

$$\text{Donc, } a = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)(F(x) - \frac{1}{n(x-1)^2}) = \frac{-[(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1]}{n(1 + 1 \dots + 1)} = -\frac{n-1}{2n}.$$

Finalement,

$$F = \frac{1}{n} \left(-\frac{n-1}{2n(X-1)} + \frac{1}{(X-1)^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\omega_k}{\omega_k - 1} \frac{1}{X - \omega_k} \right).$$

16. $\frac{n!}{(X-1)\dots(X-n)} = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{X-k}$ avec

$$\lambda_k = \lim_{x \rightarrow k} (x-k)F(x) = \frac{n!}{\prod_{j \neq k} (j-k)} = \frac{n!}{(-1)^{n-k} (k-1)!(n-k)!} = n(-1)^{n-k} C_{n-1}^{k-1}.$$

Donc,

$$\frac{n!}{(X-1)\dots(X-n)} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k} n C_{n-1}^{k-1}}{X-k}.$$

17. Posons $P = X^4 - 2X^2 \cos(2a) + 1$.

$$\begin{aligned} X^4 - 2X^2 \cos(2a) + 1 &= (X^2 - e^{2ia})(X^2 - e^{-2ia}) = (X - e^{ia})(X - e^{-ia})(X + e^{ia})(X + e^{-ia}) \\ &= (X^2 - 2X \cos a + 1)(X^2 + 2X \cos a + 1). \end{aligned}$$

P est à racines simples si et seulement si $e^{ia} \neq \pm e^{-ia}$ ce qui équivaut à $a \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

1er cas. Si $a \in \pi\mathbb{Z}$,

$$F = \frac{X^2}{(X^2 - 1)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} - \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2}.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 F(x) = \frac{1}{4} \text{ puis } x=0 \text{ fournit } 0 = -2a + 2b \text{ et donc } a = b = \frac{1}{4}.$$

$$F = \frac{X^2}{(X^2 - 1)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} \right).$$

2ème cas. Si $a \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$,

$$F = \frac{X^2}{(X^2 + 1)^2} = \frac{a}{X-i} + \frac{b}{(X-i)^2} - \frac{a}{X+i} + \frac{b}{(X+i)^2}.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow i} (x-i)^2 F(x) = \frac{i^2}{(i+i)^2} = \frac{1}{4} \text{ puis } x=0 \text{ fournit } 0 = 2ia - 2b \text{ et donc } a = -ib = -\frac{i}{4}.$$

$$F = \frac{X^2}{(X^2 + 1)^2} = \frac{1}{4} \left(-\frac{i}{X-i} + \frac{1}{(X-i)^2} + \frac{i}{X+i} + \frac{1}{(X+i)^2} \right).$$

3ème cas. Si $a \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, puisque F est réelle et paire,

$$F = \frac{A}{X - e^{ia}} + \frac{\bar{A}}{X - e^{-ia}} - \frac{A}{X + e^{ia}} - \frac{\bar{A}}{X + e^{-ia}},$$

avec

$$A = \frac{e^{2ia}}{(e^{ia} - e^{-ia})(e^{ia} + e^{ia})(e^{ia} + e^{-ia})} = \frac{e^{2ia}}{8i \sin a \cos a e^{ia}} = \frac{-ie^{ia}}{4 \sin(2a)}.$$

Donc,

$$F = \frac{1}{4 \sin(2a)} \left(-\frac{ie^{ia}}{X - e^{ia}} + \frac{ie^{-ia}}{X - e^{-ia}} + \frac{ie^{ia}}{X + e^{ia}} + \frac{ie^{-ia}}{X + e^{-ia}} \right).$$

18. Le polynôme $X^{2n} + 1 = \prod_{k=0}^{2n-1} (X - e^{i(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{2n})})$ est à racines simples car n'a pas de racine commune avec sa dérivée. En posant $\omega_k = e^{i(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{2n})}$, on a

$$\frac{1}{X^{2n} + 1} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\lambda_k}{X - \omega_k},$$

où

$$\lambda_k = \frac{1}{2n\omega_k^{2n-1}} = \frac{\omega_k}{2n\omega_k^{2n}} = -\frac{\omega_k}{2n}.$$

Finalement,

$$\frac{1}{X^{2n} + 1} = -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\omega_k}{X - \omega_k}.$$