Polynômes

On considère la suite numérique $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \geqslant 2, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(n-k)!} = 0 \end{cases}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\mathrm{A}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\mathrm{X}^{n-k}}{(n-k)!}$.

1. (a) Calculer a_1, a_2, a_3, a_4.
   (b) Écrire explicitement les polynômes A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4.
2. Montrer que la suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'unique suite de polynômes $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
   (a) $\mathrm{P}_0 = 1$;
   (b) pour tout entier $n \geqslant 1$, $\quad \mathrm{P}'_n = \mathrm{P}_{n-1}$;
   (c) pour tout entier $n \geqslant 2$, $\quad \mathrm{P}_n(0) = \mathrm{P}_n(1)$.
3. Montrer que la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\mathrm{B}_n(\mathrm{X}) = (-1)^n \mathrm{A}_n(1-\mathrm{X})$ vérifie encore les trois conditions précédentes.

   En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{A}_n(1-\mathrm{X}) = (-1)^n \mathrm{A}_n(\mathrm{X})$.
4. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{A}_n(\mathrm{X}+1) - \mathrm{A}_n(\mathrm{X}) = \dfrac{\mathrm{X}^{n-1}}{(n-1)!}$.
5. Soit $n = 2p+1$ un entier impair supérieur ou égal à 3.
   (a) Montrer que $\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(2\mathrm{X}-1)$ divise A_{2p+1}.
   (b) En déduire que $a_{2p+1} = 0$.
   (c) Écrire les polynômes $\mathrm{A}_5, \mathrm{A}_6$ et A_7.
6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{S}_n(m) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^n = 1^n + 2^n + \cdots + m^n$.
   (a) Exprimer $\mathrm{S}_n(m)$ au moyen de m, $\mathrm{A}_{n+1}(m)$ et a_{n+1}.
   (b) Donner l'expression générale (factorisée) de $\mathrm{S}_n(m)$ pour $n \in [\![1, 4]\!]$.