Polynômes

1. (a) On a $\begin{cases} a_0 = 1 \\ \dfrac{a_0}{2!} + \dfrac{a_1}{1!} = 0 \\ \dfrac{a_0}{3!} + \dfrac{a_1}{2!} + \dfrac{a_2}{1!} = 0 \\ \dfrac{a_0}{4!} + \dfrac{a_1}{3!} + \dfrac{a_2}{2!} + \dfrac{a_3}{1!} = 0 \\ \dfrac{a_0}{5!} + \dfrac{a_1}{4!} + \dfrac{a_2}{3!} + \dfrac{a_3}{2!} + \dfrac{a_4}{1!} = 0 \end{cases}$ Donc, $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = -\dfrac{1}{2} \\ a_2 = -\dfrac{1}{3!} + \dfrac{\frac{1}{2}}{2!} = \dfrac{1}{12} \\ a_3 = -\dfrac{1}{4!} + \dfrac{\frac{1}{2}}{3!} - \dfrac{\frac{1}{12}}{2!} = 0 \\ a_4 = -\dfrac{1}{5!} + \dfrac{\frac{1}{2}}{4!} - \dfrac{\frac{1}{12}}{3!} - \dfrac{0}{2!} = -\dfrac{1}{720} \end{cases}$

(b)
$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_0 &= a_0 && = 1 \\
\mathrm{A}_1 &= a_0\frac{\mathrm{X}}{1!} + a_1 && = \mathrm{X} - \frac{1}{2} \\
\mathrm{A}_2 &= a_0\frac{\mathrm{X}^2}{2!} + a_1\frac{\mathrm{X}}{1!} + a_2 && = \frac{\mathrm{X}^2}{2} - \frac{\mathrm{X}}{2} + \frac{1}{12} \\
\mathrm{A}_3 &= a_0\frac{\mathrm{X}^3}{3!} + a_1\frac{\mathrm{X}^2}{2!} + a_2\frac{\mathrm{X}}{1!} + a_3 && = \frac{\mathrm{X}^3}{6} - \frac{\mathrm{X}^2}{4} + \frac{\mathrm{X}}{12} \\
\mathrm{A}_4 &= a_0\frac{\mathrm{X}^4}{4!} + a_1\frac{\mathrm{X}^3}{3!} + a_2\frac{\mathrm{X}^2}{2!} + a_3\frac{\mathrm{X}}{1!} + a_4 && = \frac{\mathrm{X}^4}{24} - \frac{\mathrm{X}^3}{12} + \frac{\mathrm{X}^2}{24} - \frac{1}{720}
\end{aligned}$$

2. Tout d'abord, la suite (A_n) vérifie bien ces propriétés :
   (a) $\mathrm{A}_0 = 1$;
   (b) pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$\mathrm{A}'_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(n-k)\mathrm{X}^{n-k-1}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{(n-k)\mathrm{X}^{n-k-1}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{\mathrm{X}^{n-k-1}}{(n-1-k)!} = \mathrm{A}_{n-1}.$$
   (c) Soit $n \geqslant 2$.
$$\mathrm{A}_n(0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{0}{(n-k)!} + a_n = a_n\,;$$
$$\mathrm{A}_n(1) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{1}{(n-k)!} + a_n.$$
   Or, par définition de la suite (a_n), on a $\forall n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(n-k)!} = 0$, d'où $\mathrm{A}_n(1) = a_n = \mathrm{A}_n(0)$.

   Supposons maintenant qu'une suite (P_n) vérifie ces mêmes conditions et montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}_n = \mathrm{A}_n$.
   — D'après la condition a., on a $\mathrm{P}_0 = 1$ et $\mathrm{A}_0 = 1$. On a bien $\mathrm{P}_0 = \mathrm{A}_0$.
   — Supposons que $\mathrm{P}_n = \mathrm{A}_n$ avec $n \geqslant 0$. En appliquant la propriété b. à $n+1 \geqslant 1$, on a alors $\mathrm{P}'_{n+1} = \mathrm{P}_n = \mathrm{A}_n = \mathrm{A}'_{n+1}$; on en déduit $\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{A}_{n+1} + k$.

     On en déduit alors $\mathrm{P}'_{n+2} = \mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{A}_{n+1} + k = \mathrm{A}'_{n+1} + k$; et donc $\mathrm{P}_{n+2} = \mathrm{A}_{n+1} + k\mathrm{X} + \ell$.

     $\mathrm{P}_{n+2}(0) = \mathrm{A}_{n+1}(0) + \ell$ et $\mathrm{P}_{n+2}(1) = \mathrm{A}_{n+1}(1) + k + \ell = \mathrm{A}_{n+1}(0) + k + \ell = \mathrm{P}_{n+2}(0) + k$.

Mais d'après c. ($n+2 \geqslant 2$), on a $P_{n+2}(0) = P_{n+2}(0)$, donc $k = 0$. On en déduit finalement que $P_{n+1} = A_{n+1}$. L'égalité se transmet du rang n au rang $n+1$.

On a donc prouvé par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n = A_n$ *i.e.* (A_n) est bien l'unique suite de polynômes vérifiant ces trois propriétés.

3. Considérons $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $B_n(X) = (-1)^n A_n(1-X)$.
   (a) $B_0(X) = (-1)^0 A_0(1-X) = 1$;
   (b) pour tout entier $n \geqslant 1$, $B_n'(X) = (-1)^n(-A_n'(1-X)) = (-1)^{n-1}A_{n-1}'(1-X) = B_{n-1}(X)$
   (c) Soit $n \geqslant 2$. $\begin{cases} B_n(0) = (-1)^n A_n(1-0) = (-1)^n A_n(1) \\ B_n(1) = (-1)^n A_n(1-1) = (-1)^n A_n(0) \end{cases}$

   Mais $A_n(1) = A_n(0)$, donc finalement $B_n(0) = B_n(1)$

   D'après la question précédente, la suite (B_n) est égale à la suite (A_n), i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (-1)^n A_n(1-X) = A_n(X), \text{ ou encore } \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n(1-X) = (-1)^n A_n(X).$$

4. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n(X+1) - A_n(X) = \dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!}$.
   — Pour $n = 1$, $A_1(X+1) - A_1(X) = \left((X+1) - \dfrac{1}{2}\right) - \left(X + -\dfrac{1}{2}\right) = 1 = \dfrac{X^0}{0!}$;
   — Supposons que $A_n(X+1) - A_n(X) = \dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!}$ pour un certain $n \geqslant 1$.

   On a donc $A_{n+1}'(X+1) - A_{n+1}'(X) = \dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!}$, et en *intégrant* :
$$A_{n+1}(X+1) - A_{n+1}(X) = \frac{X^n}{n!} + k.$$

   Mais $A_{n+1}(1) - A_{n+1}(0)$ donc $0 = \dfrac{0^n}{(n)!} + k$ et $k = 0$ (puisque $n \geqslant 1$.)

   On a encore $A_{n+1}(X+1) - A_{n+1}(X) = \dfrac{X^n}{n!}$. La propriété est bien héréditaire.

   En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n(X+1) - A_n(X) = \dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!}$.

5. Soit $n = 2p+1$ un entier impair supérieur ou égal à 3.
   (a) D'après la question 3., on a $A_n(1-X) = (-1)^n A_n(X) = -A_n(X)$ puisque n est impair.

   Par conséquent, $A_n(1) = -A_n(0)$. Mais d'autre part, si $n \leqslant 2$, on sait que $A_n(1) = A_n(0)$, d'où finalement $A_n(1) = A_n(0) = 0$.

   On a aussi $A_n\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = -A_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et donc $A_n\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

   En d'autres termes, $0, 1$ et $\dfrac{1}{2}$ sont des racines (distinctes) de A_n.

   A_n est donc divisible par $X(X-1)\left(X - \dfrac{1}{2}\right)$, ou encore par le polynôme associé : $X(X-1)(2X-1)$.

   Si n est impair et supérieur à 3, alors $X(X-1)(2X-1)\,|A_n$.

   (b) Par définition de (A_n), le terme constant de A_{2p+1} est a_{2p+1}, i.e.$A_{2p+1}(0) = a_{2p+1}$.

   Or on a vu que 0 était une racine de A_{2p+1} pour $p \geqslant 1$.

   Donc, $\forall p \geqslant 1, a_{2p+1} = 0$.

(c) Grâce à toutes les informations on peut écrire les polynômes A_5, A_6 et A_7 sans trop de calculs fastidieux :

— $A_5' = A_4$ et le terme constant de A_5 est $a_5 = 0$.

Par conséquent, $A_5 = \frac{1}{24}\frac{X^5}{5} - \frac{1}{12}\frac{X^4}{4} + \frac{1}{24}\frac{X^3}{3} - \frac{1}{720}X + 0 = \frac{X^5}{120} - \frac{X^4}{48} + \frac{X^3}{72} - \frac{X}{720}$.

— $A_6' = A_5$ et le terme constant de A_5 est a_6.

$A_6 = \frac{1}{120}\frac{X^6}{6} - \frac{1}{48}\frac{X^5}{5} + \frac{1}{72}\frac{X^4}{4} - \frac{1}{720}\frac{X^2}{2} + a_6 = \frac{X^6}{720} - \frac{X^5}{240} + \frac{X^4}{288} - \frac{X^2}{1440} + a_6$.

— $A_7' = A_6$ et le terme constant de A_7 est $a_7 = 0$.

$A_7 = \frac{1}{720}\frac{X^7}{7} - \frac{1}{240}\frac{X^6}{6} + \frac{1}{288}\frac{X^5}{5} - \frac{1}{1440}\frac{X^3}{3} + a_6 X = \frac{X^7}{5040} - \frac{X^6}{1440} + \frac{X^5}{1440} - \frac{X^3}{4320} + a_6 X$.

La constante a_6 peut être déterminée par le fait que $A_7(0) = A_7(1)$.

Cela donne $0 = \frac{1}{5040} - \frac{1}{1440} + \frac{1}{1440} - \frac{1}{4320} + a_6$, c'est-à-dire $a_6 = \frac{1}{30240}$.

$$\begin{aligned}
A_5 &= \frac{X^5}{120} - \frac{X^4}{48} + \frac{X^3}{72} - \frac{X}{720} \\
A_6 &= \frac{X^6}{720} - \frac{X^5}{240} + \frac{X^4}{288} - \frac{X^2}{1440} + \frac{1}{30240} \\
A_7 &= \frac{X^7}{5040} - \frac{X^6}{1440} + \frac{X^5}{1440} - \frac{X^3}{4320} + \frac{X}{30240}
\end{aligned}$$

6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n(m) = \sum_{k=1}^{m} k^n = 1^n + 2^n + \cdots + m^n$.

(a) D'après la question 4., pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $A_{n+1}(X+1) - A_{n+1}(X) = \frac{X^n}{n!}$.

On peut donc exprimer $X^n = n!\left[A_{n+1}(X+1) - A_{n+1}(X)\right]$.

De ce fait, $S_n(m) = \sum_{k=1}^{m} k^n = \sum_{k=0}^{m} k^n = \sum_{k=0}^{m} n!\left[A_{n+1}(k+1) - A_{n+1}(k)\right] = n!\left[A_{n+1}(m+1) - A_{n+1}(0)\right]$.

On a $A_{n+1}(0) = a_{n+1}$, mais il reste à exprimer $A_{n+1}(m+1)$ en fonction de $A_{n+1}(m)$. D'après la question 4. $A_{n+1}(m+1) - A_{n+1}(m) = \frac{m^n}{n!}$, d'où finalement :

$$S_n(m) = n!\left[\frac{m^n}{n!} + A_{n+1}(m) - a_{n+1}\right]$$

et

$$S_n(m) = m^n + n!\left[A_{n+1}(m) - a_{n+1}\right].$$

(b) On obtient par conséquent :

$$S_1(m) = m + 1!\left[A_2(m) - a_2\right] = m + A_2(m) - a_2 = m + \frac{m^2}{2} - \frac{m}{2} = \frac{m(m+1)}{2}$$

$$S_2(m) = m^2 + 2!\left[A_3(m) - a_3\right] = m^2 + 2\left[\frac{m^3}{6} - \frac{m^2}{4} + \frac{m}{12}\right] = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

$$S_3(m) = m^3 + 3!\left[A_4(m) - a_4\right] = m^3 + 6\left[\frac{m^4}{24} - \frac{m^3}{12} + \frac{m^2}{24}\right] = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$$

Polynômes

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_4(m) &= m^4 + 4!\,[\mathrm{A}_5(m) - a_5] = m^4 + 24\left[\frac{m^5}{120} - \frac{m^4}{48} + \frac{m^3}{72} - \frac{m}{720}\right] \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1)(3m^2+3m-1)}{30}\end{aligned}$$

On retrouve :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^4 = \frac{m(m+1)(2m+1)(3m^2+3m-1)}{30}$