Fiches bilan

1. Énoncer le théorème dit de Bolzano.

   Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

   Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors f s'annule au moins une fois sur $[a\,;b]$ *i.e.* $\exists\, c \in [a\,;b]\,,\ f(c) = 0$.

2. Énoncer le théorème des bornes atteintes.

   Toute fonction continue sur un SEGMENT y est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists\, c, d \in [a\,;b] \quad \text{tels que} \quad f(c) = \min_{x\in[a;b]} f(x) \qquad \text{et} \qquad f(d) = \max_{x\in[a;b]} f(x).$$

3. Compléter le théorème de la bijection.

   Soient I un intervalle et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur I.

   Les assertions suivantes sont équivalentes :

   (i) f est strictement monotone sur I.

   (ii) f est injective sur I, donc bijective de I sur $f(\mathrm{I})$.

   Dans ces conditions, f^{-1} est continue et strictement monotone de même sens de variation que f sur $f(\mathrm{I})$.

4. Énoncer le théorème des accroissements finis.

   Soit $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$. $\quad (a < b)$

   Alors, il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) \iff f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

5. Énoncer le théorème de prolongement de classe $\mathscr{C}^1$.

   Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ continue sur I et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$.

   Si $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.

6. Soient $\forall\, f, g \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I}\,;\mathbb{K})$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$f \times g \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I}\,;\mathbb{K}) \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}.$$

7. Soit $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathrm{J}$ une bijection où I et J sont deux **intervalles** de $\mathbb{R}$.

   f^{-1} est dérivable sur J si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I .

8. On appelle *rang* d'un système linéaire, le nombre de ses inconnues principales.

9. Soient $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ avec I stable par f et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathrm{I} \\ u_{n+1} = f(u_n), \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

   Si $\begin{cases} f \text{ continue sur I} \\ \text{et} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell \in \mathrm{I} \end{cases}$, alors ℓ est un point fixe de f *i.e.* $f(\ell) = \ell$.

10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

   avec $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ et soit Δ le discriminant de son équation caractéristique.

   (a) Si $\Delta > 0$ et r_1, r_2 sont les deux racines distinctes et réelles de l'équation caractéristique, alors

$$\exists\,!\,(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ tel que } \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda {r_1}^n + \mu {r_2}^n.$$

   (b) Si $\Delta = 0$ et r est la racine double de l'équation caractéristique, alors

$$\exists\,!\,(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ tel que } \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n) r^n.$$

   (c) Si $\Delta < 0$ et $r\,\mathrm{e}^{\pm i\omega}$ sont les deux racines complexes et conjuguées de l'équation caractéristique, alors

$$\exists\,!\,(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ tel que } \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \Big(\lambda \cos(\omega n) + \mu \sin(\omega n)\Big)\, r^n.$$