

Suites récurrentes et Polynômes

1. Suites récurrentes

- Présentation de l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ sur quelques exemples simples.
 - Représentation géométrique.
 - Si (u_n) converge vers un élément ℓ en lequel f est continue, alors $f(\ell) = \ell$.
 - Intervalle stable par f .
 - Étude du signe de $f(x) - x$.
 - Utilisation de la croissance éventuelle de f .
- Application du théorème des accroissements finis à l'étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Suites récurrentes

- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : expressions explicites dans les cas réel et complexe.

3. Ensemble des polynômes à une indéterminée

- Ensemble $\mathbb{K}[X]$.
- Combinaison linéaire et produit de polynômes, formule du binôme.
- Composition.
- Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n .
- Degré d'une somme, d'un produit.

4. Divisibilité et division euclidienne

- Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples.
- Théorème de la division euclidienne. Algorithme de la division euclidienne.

5. Fonctions polynomiales et racines

- Fonction polynomiale associée à un polynôme.
- Méthode de Hörner pour l'évaluation polynomiale.
- Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.
- Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.
- Multiplicité d'une racine.

6. Dérivation

- Dérivée formelle d'un polynôme.
- Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz.
- Formule de Taylor polynomiale.
- Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.

Questions de cours possibles ^[1] :

1. (★) Tout réel est la limite de deux suites adjacentes de décimaux.
2. (★) Savoir expliquer et démontrer le principe de dichotomie à partir de deux suites adjacentes (le théorème de Bolzano devra être su).

3. Une suite récurrente définie sur un intervalle stable par sa fonction génératrice est correctement définie.
4. Lien entre monotonie d'une fonction et les suites définies par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.
5. Forme explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre deux dans le cas complexe.
6. (★) Théorème de Taylor
7. Les polynômes de degré 1 sont irréductibles.
8. α est racine de P si, et seulement si $X - \alpha$ divise P.
9. En admettant le théorème précédent, si P admet n racines α_i distinctes alors P est divisible par le produit des $X - \alpha_i$.

[1]. La liste des questions de cours possibles n'est donnée qu'à titre indicatif. L'examineur est libre de vous demander tout éclaircissement ou démonstration que réclamera votre prestation en accord avec le programme.