Analyse asymptotique

Commentaires : *Pour toutes vos recherches de DL ou DA, je vous conseille vivement de vérifier vos calculs avec des applis telles que* dcode.

I/ Calculs de développements limités

Exercice 1 (DL de $\arctan(x)$ au voisinage de 0) : Donner le développement limité de $\arctan(x)$ au voisinage de 0.

Exercice 2 : Donner un développement limité au voisinage de 0 des fonctions suivantes à l'ordre 4 :

1. $x \longmapsto e^x - \dfrac{1}{2}\ln(1-x)$
2. $x \longmapsto \dfrac{1}{2-x}$
3. $x \longmapsto (1+x)^x$
4. $x \longmapsto \cos^2(x)$
5. $x \longmapsto e^{\cos(x)}$
6. $x \longmapsto \cos(\sin(x))$

Exercice 3 : Donner un développement limité au voisinage de 0 des fonctions suivantes au voisinage du point et à l'ordre indiqués :

1. $x \longmapsto \cos(x)$ en $\dfrac{\pi}{4}$ à l'ordre 3.
2. $x \longmapsto \ln(x)$ en e à l'ordre 4.
3. $x \longmapsto e^x$ en 2 à l'ordre 4.

Exercice 4 : Donner un développement limité au voisinage de 0 des fonctions suivantes aux ordres indiqués :

1. $x \mapsto (e^x)^2$ à l'ordre 3.
2. $x \mapsto \ln^2(1+x)$ à l'ordre 4.
3. $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{1+x}$ à l'ordre 3.
4. $x \mapsto (\sin(x)-x)(\cos(x)-1)$ à l'ordre 8.
5. $x \mapsto \sin^6(x)$ à l'ordre 9.
6. $x \mapsto e^{\sin(x)}$ à l'ordre 5.
7. $x \mapsto \arctan\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ à l'ordre 3.
8. $x \mapsto \ln(\cos^2(x))$ à l'ordre 4.
9. $x \mapsto \tan(\operatorname{sh}(x) - x)$ à l'ordre 8.
10. $x \mapsto \sin\left(\dfrac{x^2}{1+x^2}\right) - \dfrac{x^2}{1+x^2}$ à l'ordre 9.
11. $x \mapsto \sqrt{1+\arctan(x)}$ à l'ordre 3.
12. $x \mapsto \ln(\cos(x))$ à l'ordre 6.
13. $x \mapsto \dfrac{x^3}{\operatorname{sh}(x) - x}$ à l'ordre 2.
14. $x \mapsto \sqrt[3]{\dfrac{e^x - 1}{x}}$ à l'ordre 3.
15. $x \mapsto \arctan^2(x)\cos(x)$ à l'ordre 5.

Exercice 5 : Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\cos(x) - \dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$ soit un $o(x^n)$ en 0 avec n le plus grand possible.

Application ?

II/ Applications

Exercice 6 : Déterminer le sens de variation des suites $\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7 :

1. Parmi les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^*$: $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x \longmapsto x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x \longmapsto x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $x \longmapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$, lesquelles sont prolongeables par continuité en 0 ? L'éventuel prolongement est-il dérivable sur $\mathbb{R}$? de classe $\mathscr{C}^1$? de classe $\mathscr{C}^\infty$?
2. Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(0) = 0$.

   Montrer que $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{x} \end{array}$ admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 : Montrer que la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ sans être deux fois dérivable en 0.

Exercice 9 : Soit f la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = 2\tan(x) - x$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque de classe $\mathscr{C}^\infty$.
2. Donner le développement limité de f^{-1} à l'ordre 6 en 0.

Exercice 10 : Mêmes questions avec

1. $g : x \longmapsto \dfrac{e^{x^2} - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$ à l'ordre 3.
2. $h : x \longmapsto x\cos(x)$.

III/ Limites et équivalents

Exercice 11 : Donner un équivalent en 0 des expressions suivantes :

1. $\sin(2x) - \sin(x)$
2. $\mathrm{e}^{\tan(x)} - \sqrt{1+x^2}$.
3. $\mathrm{e}^{\tan(x)} - \sqrt{1+x}$.

Exercice 12 : Donner un équivalent en $+\infty$ de $\dfrac{\ln(n+1)}{n} - \dfrac{\ln(n)}{n+1}$.

Exercice 13 : Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^5}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+6x} - \sqrt[3]{1+x}}{3\sin(x) - \ln(1+x)}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sh}\,(\sin(x)) - \sin(\mathrm{sh}\,(x))}{x^5 - \sin^5(x)}$
4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - \arccos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{2 - 2\cos(x)}{x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
10. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)}$
11. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^2}$
12. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{\mathrm{sh}\,(x) - x\mathrm{ch}\,(x)}$
13. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\tan(x) - \tan(2x)}{x\sin^2(x)}$
14. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}$
15. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\tan^2(x)} - \frac{1}{x^2}$
16. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\arctan(x)} - \mathrm{e}^{\tan(x)}}{\mathrm{e}^{\arcsin(x)} - \mathrm{e}^{\sin(x)}}$
17. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\sin(x)}$
18. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$
19. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$
20. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1 - 2x\ln(x)}{x(x-1)\ln(x)}$
21. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\ln\left(\frac{x}{1+x}\right) + x - 1$
22. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\ln(x)}$
23. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin(x))}{(\pi - 2x)^2}$

Exercice 14 : Pour tous $a, b > 0$, montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2} \right)^x = \sqrt{ab}$.

Exercice 15 : Comparer les termes suivants pour la relation de négligeabilité :

1. En 0 par valeurs supérieures : $\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}$ et $\dfrac{1}{t^2}$.
2. En 1 par valeurs inférieures : $\ln(1-t)$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$.

Exercice 16 : Trouver des équivalents les plus simples possibles aux points indiqués de :

1. $\cos(t)$, $1-\cos(t)$ et $\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}$ quand $t \to 0$.
2. $\cos(t)$ quand $t \to \dfrac{\pi}{2}$.
3. $\ln(\sin(t))$ quand $t \to 1$ et $t \to 0^+$
4. $\dfrac{1}{x} - \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\ln\left(\dfrac{\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)}\right)$, $\mathrm{e}^x - 1$ et $\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}$ quand $x \to +\infty$.
5. $\dfrac{1}{n} - \displaystyle\int_n^{n+1} \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$, $\sqrt[3]{n^3 + \alpha n} - \sqrt{n^2+1}$, $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ et $n^{\frac{1}{n}} - 1$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 17 : Calculer les développements limités suivants :

1. $\arccos(x)$ à l'ordre 5 en 0.
2. $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ à l'ordre 5 en 0.

Exercice 18 : Soit f la fonction définie sur $]-1\,;1[$ par $f(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Déterminer la fonction $a :]-1\,;1[\longmapsto \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in]-1\,;1[$, $f'(x) + a(x)f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.
2. Déterminer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de a.
3. En déduire un développement limité à l'ordre 5 en 0 de f.
4. Proposer une autre méthode pour obtenir un tel DL.

IV/ Études locale et asymptotique

Exercice 19 : Montrer que :

1. $\dfrac{\sin(x) - x}{\ln(1+x) - x} \underset{x \to 0}{=} \dfrac{x}{3} + \dfrac{2}{9}x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$ et $\dfrac{\ln(1+x) - x}{\sin(x) - x} \underset{x \to 0}{=} \dfrac{3}{x} - 2 + \dfrac{33}{20}x + \mathrm{o}\left(x\right)$.
2. Que peut-on en déduire pour l'étude locale en 0 des fonctions associées ?

Exercice 20 : À partir d'un développement limité, déduire le prolongement par continuité, la dérivabilité, la position relative locale courbe/tangente de

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) \text{ en } 0.$$

Exercice 21 : Pour chacune des fonctions suivantes, donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en 0 et étudier leur position relative.

1. $f : x \longmapsto \exp(x) - \dfrac{1}{1+x}$.
2. $g : x \longmapsto x\cos(2x)$.
3. $h : x \longmapsto \cos(x)\sin(2x)$.
4. $k : x \longmapsto \ln\left(1 + x + x^2\right)$ en 0 et 1.

Exercice 22 : Étude locale en $a = 1$ de f définie par $f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x^2 - 1}$.

Exercice 23 : Donner un développement asymptotique en $o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ de arctan en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 24 : Calculer le développement asymptotique des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto \arctan(x)$ en $+\infty$ et $-\infty$ à l'ordre 3.
2. $x \longmapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$ à l'ordre 2.
3. $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x^4}{x^2+1}}$ en $+\infty$ à l'ordre 6.

Exercice 25 : Étude de f définie par $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^4}{x-3}}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 26 : Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer une équation de leurs asymptotes en $\pm\infty$ et préciser la position de leurs graphes par rapport à celles-ci.

1. $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x^3+1}{x+1}}$
2. $g : x \longmapsto \sqrt{x^2 - 2x + 2}$
3. $h : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x+2}}$
4. $k : x \longmapsto x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$
5. $\varphi : x \longmapsto (x+2)^{\frac{1}{x}}$
6. $\psi : x \longmapsto \sqrt[3]{x^3 - x^2}$
7. $\xi : x \longmapsto \dfrac{1}{x+x^2} + 2\arctan(x)$
8. $\zeta : x \longmapsto \dfrac{x^2 - x + 2}{x+1} e^{-\frac{1}{x}}$
9. $2x - \sqrt{x^2+1}$
10. $2x + 2 + \sqrt{x^2 - 6x + 1}$

Analyse asymptotique

Exercice 27 : Montrer que la parabole d'équation $y = \mathrm{e}x^2 + \frac{\mathrm{e}}{2}x - \frac{\mathrm{e}}{24}$ est asymptote à la courbe de f définie par :

$$f(x) = x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1+x},$$

et que la courbe de f est au-dessus de cette dernière.

Exercice 28 : Soit $n \geqslant 1$.

1. Montrer que l'équation $\tan(x) = x$ possède une solution unique x_n dans $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}\,;n\pi+\frac{\pi}{2}\right[$, puis démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
2. Quelle relation lie x_n et $\arctan(x_n)$?
3. Montrer que la suite $(x_n - n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente puis que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \mathrm{o}(1)$.
4. En écrivant $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon_n$ et en utilisant le résultat de la question 2 ., en déduire que

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi n} + \frac{1}{2\pi n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 29 : On considère, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x + \ln(x) = n$.

1. Démontrer que cette équation admet une unique solution $x_n \in \left]0\,;+\infty\right[$, puis démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
2. Démontrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
3. Démontrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
4. Démontrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + \mathrm{o}(\ln(n))$. On pourra poser a_n tel que $\frac{x_n}{n} = 1 + a_n$.
5. Démontrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.
6. En admettant éventuellement le résultat de la question précédente, dire parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies :

   (a) $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n - \ln(n)$

   (b) $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n - 2\ln(n)$

   (c) $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n - \ln(n) + \mathrm{o}\left(\sqrt{\ln(n)}\right)$

   (d) $x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n}$.